

Thermische Gluonen jenseits reiner Störungstheorie

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften

— Dr. rer. nat. —

genehmigte Dissertation
von

Dipl. Phys. Jens Reinbach

geb. am 15. Juli 1968 in Hannover

2000

Referent : Prof. Dr. H. Schulz, Universität Hannover
Korreferent : Prof. Dr. M. Lewenstein, Universität Hannover
Tag der Promotion : 18. Dezember 2000

Thermische Gluonen jenseits reiner Störungstheorie

Überblick

Die störungstheoretische Behandlung nicht-abelscher Eichtheorie bei hoher Temperatur führt aufgrund chromomagnetischer Effekte zu einer Berechenbarkeitsschwelle. Es entstehen unendlich viele Terme gleicher Größenordnung. Die aufzusummierende numerische Reihe ist in dem auf 3D reduzierten Anteil der Theorie enthalten, welcher kürzlich als 2+1D Yang-Mills-Theorie bei $T = 0$ von Karabali, Kim und Nair nicht-störungstheoretisch behandelt wurde.

In der vorliegenden Arbeit werden die exakten 3D-Resultate mit der thermischen 4D-Diagrammatik kombiniert. Insbesondere wird die Abspaltung des räumlichen Anteils der transversalen Selbstenergie im statischen Limes behandelt. Wie erwartet, kann das 3D-Untersystem als regularisierte 3D Yang-Mills-Theorie aus der 4D-Struktur herausgetrennt werden. In 1-loop Ordnung werden die Regulatoren explizit erhalten. Für die 2-loop Ordnung kann unter anderem gezeigt werden, daß der generische Beitrag mit harten inneren Impulsen verschwindet. Es wird untersucht, wie die magnetische Masse folgen könnte. Beim Druck gelingt es, den 3D-Anteil in 1- und 2-loop Ordnung abzuspalten und Regulatoren zu erhalten.

Schlagworte :

Gluon-Plasma, transversale Selbstenergie, magnetische Masse, Druck, 3D Yang-Mills-Theorie.

Thermal gluons beyond pure perturbation theory

Abstract

The perturbative treatment of non-abelian gauge theory at high temperature leads to a threshold in calculation because of chromomagnetic effects. Infinitely many terms of the same order of magnitude arise. The numerical series to be summed is contained in the part of the theory reduced on 3D, which was recently treated non-perturbative as 2+1D Yang-Mills theory at $T = 0$ by Karabali, Kim and Nair.

In the thesis in question the exact 3D results are combined with the thermal 4D diagrammatic. In particular the splitting of the space-part of the transverse self-energy in the static limit is treated. As expected, the 3D subsystem can separate as regularized 3D Yang-Mills theory from the 4D structure. In 1-loop order the regulators are received explicit. For 2-loop order it can be shown amongst other things, that the generic contribution with hard inner momenta vanishes. It is examined, how the magnetic mass could follow. Under pressure it is possible to separate the 3D part in 1- and 2-loop order and to receive regulators.

Keywords :

Gluon plasma, transverse self-energy, magnetic mass, pressure, 3D Yang-Mills theory.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Yang–Mills–Felder bei hoher Temperatur	5
1.1 Das Funktionalintegral	5
1.2 Die Lagrange–Dichte der Yang–Mills–Theorie	6
1.3 Die Störungsreihe	8
1.4 Regularisierung	11
1.4.1 IR–Regularisierung	11
1.4.2 UV–Regularisierung	12
1.5 Anregungen im Gluon–Plasma	13
1.5.1 Lineare Antwort– und thermische Greens–Funktion	13
1.5.2 Gluon–Dispersion	14
1.6 Das Linde–Problem	16
2 Die Karabali–Nair–Theorie	19
2.1 Vom Schrödinger–Funktional zur Energielücke	19
2.2 Abspalten des Eichorbits	20
2.2.1 Parametrisierung des Eichfeldes	21
2.2.2 Die Metrik im Raum der Eichfelder	22
2.2.3 Eichinvariante Freiheitsgrade	23
2.3 Wess–Zumino–Witten–Theorie	24
2.3.1 Funktionale Differentialgleichungen für die Wirkung	24
2.3.2 Hermitesche Wess–Zumino–Witten–Wirkung	25
2.3.3 Matrixelemente zweier physikalischer Zustände	26
2.4 Der funktionale Hamilton–Operator	27
2.4.1 Wilson–loop	27
2.4.2 Energie–Eigenwerte	28

3	Magnetische Abschirmung	31
3.1	Besonderheiten zum statischen Limes	31
3.2	1-loop transversale Selbstenergie	34
3.2.1	Diagramme mit nackten Linien	34
3.2.2	Die nächst-führende Ordnung	36
3.2.3	Das Resultat in 1-loop Ordnung	37
3.3	2-loop transversale Selbstenergie — harte innere Impulse	38
3.4	2-loop 2PR-Diagramme	41
3.4.1	Präparieren der g^4 -Beiträge	41
3.4.2	Abspalten des 3D-Anteils	44
3.4.3	Nicht zum 3D-Anteil gehörende 2PR-Terme	46
3.5	2-loop 2PI-Diagramme	48
3.5.1	Präparieren der g^4 -Beiträge	49
3.5.2	Nicht zum 3D-Anteil gehörende 2PI-Terme	51
3.6	Magnetische Masse	52
4	Der Druck des Gluon-Systems	57
4.1	Die Vorgeschichte	57
4.2	1-loop Diagramme	60
4.3	2-loop Diagramme	61
4.3.1	Diagramme mit nackten Gluon-Propagatoren	62
4.3.2	Reproduktion des bekannten Resultates bis $\mathcal{O}(g^3)$	62
4.4	g^6 -Terme aus 1- und 2-loop Diagrammen	64
4.5	Ausblick zu 3- und 4-loop Diagrammen	68
	Zusammenfassung	71
	Anhang	73
A	Ein typisches 1-loop-Integral	73
B	YM-Graphenregeln	75
C	Lorentz-Matrix-Basis	76
D	1- und 2-loop Selbstenergie-Diagramme	77
E	Statischer und langwelliger Limes	82
F	MAPLE-Programme	83
	Literaturverzeichnis	87

Einleitung

In unserer kalten Welt findet man Quarks und Gluonen nur in gebundenen Zuständen, z.B. den Protonen und Neutronen. Im sehr frühen Universum, bis einige Mikrosekunden nach dem Urknall, war die Energiedichte jedoch so groß, daß die mittlere freie Weglänge der Teilchen größer als der Radius der Bindungszustände war. Unter diesen Bedingungen bilden Quarks und Gluonen ein schwach wechselwirkendes „Gas“, das sogenannte Quark-Gluon-Plasma.

Die zugrunde liegende Theorie ist die Quantenchromodynamik (QCD). Sie ist eine nicht-abelsche Eichtheorie der Gruppe $SU(3)$ (allgemein $SU(N)$), deren $N^2 - 1 = 8$ Eichbosonen — die Gluonen — Träger von „Farbladungen“ sind. Sie vermitteln die starke Wechselwirkung, der die Quarks unterliegen. Diese verbietet die freie Ausbreitung von Zuständen mit nicht-verschwindender Farbladung (Farbeinschluß oder *confinement*) [1, 2]. Die erlaubten farbneutralen Kombinationen von Quarks, Antiquarks und Gluonen sind die Hadronen.

Die QCD sagt voraus, daß der Farbeinschluß aufgehoben wird, wenn aus Hadronen zusammengesetzte Materie auf extrem hohe Energiedichten gebracht wird. Die kritische Temperatur für den Übergang zum Quark-Gluon-Plasma kann mit Hilfe numerischer Rechnungen am Gitter mit ca. 170 MeV (oder $2 \cdot 10^{12}$ K) angegeben werden [3, 4].

Vor kurzem fand man am CERN auch experimentell Hinweise auf die Erzeugung eines Quark-Gluon-Plasmas [4]. Im dortigen Super-Proton-Synchrotron (SPS) wurden während eines mehrjährigen Forschungsprogramms Blei-Atomkerne auf Energien von 158 GeV/Nukleon beschleunigt und mit Atomkernen einer Blei- oder Goldfolie zur Kollision gebracht. In der Stoßzone entstand dabei für die kurze Zeit von ca. 10^{-23} s eine Energiedichte, die 20 mal größer war als jene im Inneren von Atomkernen. Unter diesen Bedingungen sollte der Farbeinschluß aufgehoben sein. Wenn dies auch nicht direkt nachgewiesen werden konnte, so gaben doch die gemessenen Hadronen, welche im Stoßprozeß entstanden sind, Hinweise darauf. Einen eindeutigen Existenzbeweis erhofft man sich von den neuen Beschleunigern RHIC (Brookhaven) und LHC (CERN).

Die QCD ist eine renormierbare Theorie [5, 6] und die Kopplungskonstante g eine Funktion der Energie (*running coupling*). Als nicht-abelsche Eichtheorie ist die QCD asymptotisch frei. Das bedeutet, daß für sehr hohe Energien (mindestens im GeV-Bereich) g klein wird, so daß eine störungstheoretische Behandlung des Quark-Gluon-Plasmas möglich wird [1, 2]. Der Grenzfall extrem hoher Temperatur bietet damit die Möglichkeit, die QCD mit ihren komplexen Strukturen und Schwierigkeiten überhaupt zu behandeln.

Im Hochtemperaturlimes der QCD spielen Quarks nur eine untergeordnete Rolle. Eine Beschränkung auf den Gluon-Anteil des Plasmas ist daher sinnvoll. Das Gluon-Plasma wird beschrieben durch eine masselose Bose-Feldtheorie, der Yang-Mills- (YM-) Theorie.

Lange Zeit führte Störungsrechnung zu inkonsistenten Entwicklungen. Erst Braaten und Pisarski [7] begründeten 1990 eine Resummation (Umordnung) der Störungsreihe, welche für eichinvariante Resultate sorgte. Diese Resummation beruht auf der Unterscheidung verschiedener physikalischer Skalen, nämlich der Temperatur-Skala ($\sim T$), der chromoelektrischen ($\sim gT$) und der chromomagnetischen ($\sim g^2T$) Skala. Impulse auf diesen Skalen bezeichnet man als *hard*, *soft* und *supersoft*. Die Angabe einer effektiven Wirkung für die *soft* Skala war möglich [8, 9]. Als erste Anwendung der Resummation konnte die Dämpfung kollektiver Anregungen im Quark-Gluon-Plasma bestimmt werden [10]. Es folgte eine produktive Phase, in der z.B. Korrekturen zur Plasma-Dynamik (Selbstenergie) [11, 12] und zum Druck des Plasmas [13, 14, 15, 16] erhalten werden konnten.

Inzwischen sind die Möglichkeiten auf *hard*- und *soft*-Skala ausgeschöpft. Für ein weiteres Auswerten der Störungsreihen muß die *supersoft* Skala einbezogen werden. Die auf dieser Skala generierte thermische Masse, die sogenannte magnetische Masse, hat die Größenordnung $\sim g^2T$ [17]. Sie führt zu dem von A. Linde [18] bereits 1980 vorhergesagten Mechanismus: Es entstehen unendlich viele Terme gleicher Größenordnung, wodurch Störungsrechnung an der Selbstenergie ab $\mathcal{O}(g^4T^2)$ und am Druck ab $\mathcal{O}(g^6T^4)$ unmöglich wird [19]. Jedoch werden jene unendlich vielen Terme allein durch den räumlichen Anteil der Theorie erfaßt [20, 16, 17], was eine Reduzierung auf drei Dimensionen ermöglicht.

An der eben genannten Berechenbarkeitsschwelle scheiterte bislang ein weiteres Auswerten der Störungsreihe. Neuerliche Publikationen von D. Karabali, C. Kim und V.P. Nair (kurz KKN) [21, 22] lassen nun wieder Hoffnung aufkommen: Sie können eine 2+1 dimensionale Yang-Mills-Theorie bei $T = 0$ (Kopplung e) nicht-störungstheoretisch analysieren. Unter Verwendung des Schrödinger-Funktional, Präparieren des physikalischen Sektors und Methoden aus konformer Feldtheorie war es ihnen möglich eine Energielücke der Größe $e^2N/2\pi$ zu bestimmen. Diese Energielücke könnte via $e^2 = g^2T$ der (chromo-) magnetischen Masse in thermischer Feldtheorie entsprechen. Erstmals auf analytischem Wege erhielten KKN in einer weiteren Arbeit [23] sogar Farbeinschluß.

Obwohl KKN eine Möglichkeit vorstellen, die Schwelle in der störungstheoretischen Behandlung thermischer Größen zu überwinden, wurden ihre Arbeiten von thermischen Feldtheoretikern bisher praktisch nicht zur Kenntnis genommen. Dabei wird der problematische räumliche Anteil der 3+1 D YM-Theorie gerade durch die KKN-Theorie erfaßt. Es bleibt die Aufgabe, den rein räumlichen Anteil zu separieren und zu zeigen, daß der Einbau der KKN-Masse in die 3+1 D Theorie zu keinem Widerspruch führt.

In Kapitel 1 wird neben einigen Grundlagen eine Einführung in die Thematik gegeben. Kapitel 2 behandelt die KKN-Theorie. In Kapitel 3 (Teile sind bereits publiziert [24]) beginnt die eigentliche Arbeit. Es wird die transversale Selbstenergie im statischen Limes (magnetische Abschirmung) in 1- und 2-loop Ordnung hinsichtlich des 3D-Anteils untersucht. Alle Beiträge, die nicht der regularisierten 3D-Theorie zugeordnet werden können, sollten verschwinden. Schließlich wird diskutiert, wie aus der KKN-Theorie die magnetische Masse folgen könnte. Kapitel 4 befaßt sich mit dem Druck des Gluon-Systems. Auch hier soll bis 2-loop Ordnung der 3D-Anteil in regularisierter Form separiert werden.

Kapitel 1

Yang–Mills–Felder bei hoher Temperatur

Als Einführung und zum Verständnis des dritten und vierten Kapitels werden einige Grundlagen benötigt. Der erste Abschnitt gibt einen kurzen Einblick in die Herleitung der Funktionalintegral–Darstellung der Zustandssumme. Auf die Herleitung der eichfixierten Lagrange–Dichte der Yang–Mills–Theorie wird in Abschnitt 1.2 eingegangen. Abschnitt 1.3 führt einige Notationen ein und stellt die störungstheoretische Behandlung der Zustandssumme vor. In 1.4. wird die Regularisierung der Theorie behandelt. Abschnitt 1.5 diskutiert die Anregungen des Gluon–Systems, insbesondere die Problematik des statischen Limes der transversalen Dispersionskurve. Das resultierende Linde–Problem wird in Abschnitt 1.6 erläutert.

1.1 Das Funktionalintegral

Wir arbeiten in der Minkowski–Metrik $(+ - - -)$ und wählen als Zeitkontour jene von Matsubara [1, 25] mit Anfangspunkt bei 0 und Endpunkt bei $-i\beta$ ($\beta = 1/T$). Schreibt man $t =: -i\tau$, dann ist $x = (-i\tau, \vec{r})$ und $x^2 = -\tau^2 - r^2$.

Die Thermodynamik eines Systems im thermischen Gleichgewicht wird beschrieben durch die Freie Energie $F = -T \ln(Z)$ und deren Ableitungen nach den kanonischen Variablen. Die Zustandssumme Z hat allgemein die Form $Z = \text{Sp} (e^{-\beta H})$ (H ist der Hamilton–Operator). Wir wollen diese als Funktionalintegral schreiben und den Weg dorthin stichpunktartig skizzieren. Ausführlichere Darstellungen finden sich z.B. in [1, 2, 6, 19, 25, 26].

In der folgenden Liste machen wir von der üblichen Vereinfachung Gebrauch, eine „allgemeine“ Bose–Feldtheorie zu betrachten, welche ein skalares reelles Feld ϕ beschreibt.

- Die Basis für die Spurbildung erstreckt sich über Feldkonfigurationen $\{\phi\}$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 . Damit wird $Z = \mathcal{N}' \left(\prod_{\vec{r}} \int d\phi(\vec{r}) \right) \langle \{\phi\}, t_0 | e^{-\beta H} | \{\phi\}, t_0 \rangle$, worin \mathcal{N}' ein Maßfaktor ist.

- $\langle \{\phi\}, t_0 | e^{-\beta H} = \langle \{\phi\} | e^{-iH(t_0 - i\beta)} = \langle \{\phi\}, t_0 - i\beta |$. Soll die Zeit entlang der Matsubara-Kontour laufen, so ist $t_0 = 0$.
- Zerlegung des Intervalls $[0, \beta]$ in n gleich große infinitesimale Teilintervalle $\delta\tau$ und Einschlebung gescheiter $\mathbf{1}$ -Operatoren liefert, da H zeitunabhängig ist, n Matrixelemente der Form $\langle \{\phi'\} | e^{H\delta\tau} | \{\phi''\} \rangle$. $\{\phi''\}$ und $\{\phi'\}$ sind die Feldkonfigurationen, die im zeitlichen Abstand von $\delta\tau$ vorliegen.
- In jedes der n Matrixelemente ist ein weiterer $\mathbf{1}$ -Operator aus Impuls-Eigenzuständen einzuschleiben, woraufhin der Hamilton-Operator H durch seinen Eigenwert $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ ersetzt werden kann.
- Mittels $\langle \{\phi\} | \{\dot{\phi}\} \rangle \sim e^{i\int d^3r \dot{\phi}(\vec{r})\phi(\vec{r})}$ und Zusammenfassen der n $\prod_{\vec{r}} \int d\phi(\vec{r})$ und $\prod_{\vec{r}} \int d\dot{\phi}(\vec{r})$ Integrationen zu $\int \mathcal{D}\phi$ bzw. $\int \mathcal{D}\dot{\phi}$, wobei letztere ausgeführt und als Konstante in den Maßfaktor \mathcal{N} geschrieben werden kann, erhält man schließlich :

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3r \mathcal{L}} \quad . \quad (1.1)$$

Hierin ist $\int^\beta := \int_0^\beta \int d^3r$ (siehe (1.13)) und $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ die Lagrange-Dichte mit $V(\phi)$ als Potentialterm. Das Funktionalintegral läuft über alle Wege zwischen festen Feldkonfigurationen an den Rändern der Zeitachse. Wie das Matrixelement im ersten der obigen Punkte zeigt, sind die Feldkonfigurationen zu den Zeiten 0 und $-i\beta$ gleich. Damit hat das (unter dem Funktionalintegral klassisch gewordene) Bose-Feld β -periodische Randbedingungen bezüglich τ , d.h. $\phi(0, \vec{r}) = \phi(-i\beta, \vec{r})$ [26, 1].

Unglücklicherweise ist das Funktionalintegral nur für den in ϕ quadratischen Anteil (\mathcal{L}_0) ausführbar. Daher bedient man sich der Störungsrechnung. Die kleine Größe, nach der entwickelt wird, ist die Kopplungskonstante g .

1.2 Die Lagrange-Dichte der Yang-Mills-Theorie

Als Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen folgt jedes Quark der Dirac-Gleichung. Sein Spinorfeld trägt eine zusätzliche Farbquantenzahl. Um die bekannten Hadronen aus Quarks zusammensetzen zu können, ohne dabei das Pauli-Prinzip zu verletzen, muß die Farbquantenzahl drei Werte annehmen dürfen. Daher ist $SU(3)$ die Eichgruppe der QCD. Im folgenden wird, um allgemein zu bleiben, die Gruppe $SU(N)$ mit beliebigem ganzzahligen $N \geq 2$ betrachtet. Die Generatoren T^a dieser Gruppe, mit Farbindex $a = 1, \dots, N^2 - 1$, sind hermitesche und spurfreie $N \times N$ Matrizen. Sie sind mittels $\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ orthonormiert und definieren über die Kommutator-Relation

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad , \quad (1.2)$$

die total antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} der Gruppe. Im Fall der $SU(2)$ -Gruppe gibt es drei Generatoren, z.B. die 2×2 Pauli-Matrizen. Für $SU(3)$ sind es acht Generatoren, z.B. die 3×3 Gell-Mann-Matrizen [27].

Die Dirac–Gleichung $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$ für das N -komponentige Spinorfeld ψ der Quarks muß invariant sein unter den lokalen Eichtransformationen

$$\psi \rightarrow U\psi \quad , \quad U = e^{-ig\Lambda^a T^a} \quad (1.3)$$

mit beliebigen reellen Funktionen $\Lambda^a(x)$ (über doppelt auftretende Lorentz- und Farbindizes wird summiert). Dies erzwingt den Übergang $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$, worin g die (dimensionslose) Kopplungskonstante und A_μ^a das Eichfeld ist. Invarianz der Quark–Lagrange–Dichte verlangt die Umeichung der kovarianten Ableitung $D_\mu \rightarrow UD_\mu U^{-1}$, wobei

$$\frac{i}{g}UD_\mu U^{-1} = UA_\mu^a T^a U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (1.4)$$

gilt. Hieraus folgt das Verhalten der $N^2 - 1 =: \eta$ Eichfelder unter einer infinitesimalen lokalen Eichtransformation Λ^a :

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - D_\mu^{ab} \Lambda^b =: (A_\mu^a)^U \quad \text{mit} \quad D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - gf^{abc} A_\mu^c \quad . \quad (1.5)$$

Der Feldstärketensor bekommt mit der kovarianten Ableitung die Gestalt

$$F_{\bullet\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.6)$$

(der Punkt verweise auf volles nicht–abelsches F). Die Spur des Quadrates des Feldstärketensors ist invariant unter einer Eichtransformation, folglich ist die Lagrangedichte des Gluon–Feldes (YM–Feldes) der klassischen Chromodynamik,

$$\mathcal{L}_{\text{klass}} = -\frac{1}{4}F_{\bullet}^{\mu\nu a} F_{\bullet\mu\nu}^a \quad , \quad (1.7)$$

eichinvariant.

Die Quantisierung der Theorie darf nur im Raum der physikalischen (nicht durch Umeichung erreichbaren) Felder erfolgen. Das unendliche „Eichvolumen“ wird nach einem Verfahren von Faddeev und Popov [2, 6, 28] abgespalten. Während die Zustandssumme $Z_{\text{klass}} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{\int \mathcal{L}_{\text{klass}}}$, welche analog zu den Ausführungen in Abschnitt 1.1 hergeleitet wird, noch den gesamten Eichorbit enthält, ist in

$$Z = \frac{1}{Z_\alpha} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\{A_\mu^a, c_1^a, c_2^a\} e^{\int \mathcal{L}} \quad (1.8)$$

die Eichung durch einen Eichfixierungsparameter α (kovariante Eichung) festgelegt: Die Lagrange–Dichte \mathcal{L} ist eichfixiert. Das Funktionalintegral erstreckt sich zusätzlich über 2η unabhängige, antikommutierende Grassmann–Felder $c_{1,2}^a$, den sogenannten Faddeev–Popov–Geistern [6]. Die Geister sind keine physikalischen Felder. Sie korrigieren den bei Eichfixierung entstandenen Fehler.

Die Lagrange–Dichte \mathcal{L} besteht aus dem klassischen Anteil (1.7), einem Eichfixierungsterm und dem Geist–Term:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\bullet}^{\mu\nu a} F_{\bullet\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + c_1^a \partial^\mu (\delta^{ab} \partial_\mu - gf^{abc} A_\mu^c) c_2^b \quad . \quad (1.9)$$

Der Maßfaktor Z_α in (1.8) sorgt für Unabhängigkeit der Zustandssumme vom Eichfixierungsparameter α . Er läßt sich auf

$$Z_\alpha = \prod_a \prod_P' \sqrt{\alpha} \quad , \quad (1.10)$$

festlegen [29], worin \prod_P' ein Produkt über alle (Vierer-) Impulse mit Ausnahme von $P = 0$ darstellt. Der Maßfaktor \mathcal{N} kann dann so gewählt werden, daß $g \rightarrow 0$ auf $\eta := (N^2 - 1)$ Hohlraumstrahlungen führt (jedes der Felder A_μ^a trägt eine halbe Hohlraumstrahlung bei, die Geister $c_{1,2}^a$ jeweils eine halbe negative).

Mit Blick auf (1.6) und $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ erhalten wir die Lagrange-Dichte der YM-Theorie in kovarianter Eichung in ihrer endgültigen Form $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + c_1^a \partial^\mu \partial_\mu c_2^a \quad , \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -g f^{abc} (\partial^\mu A^\nu{}^a) A_\mu{}^b A_\nu{}^c - \frac{1}{4} g^2 f^{eab} f^{ecd} A^\mu{}^a A^\nu{}^b A_\mu{}^c A_\nu{}^d + g f^{abc} c_1^a \partial^\mu A_\mu{}^b c_2^c \quad . \end{aligned} \quad (1.11)$$

\mathcal{L}_0 ist die Lagrange-Dichte der wechselwirkungsfreien Theorie. \mathcal{L}_{int} beinhaltet die Wechselwirkung.

1.3 Die Störungsreihe

Wie in (thermischer) Feldtheorie üblich, werden die Felder $A_\mu^a(-i\tau, \vec{r})$ und $c_{1,2}^a(-i\tau, \vec{r})$ im Impulsraum betrachtet. Wegen der periodischen Randbedingungen bezüglich τ lassen sich A_μ^a und $c_{1,2}^a$ in diskrete Fourier-Moden mit den Matsubara-Frequenzen $\omega_n = 2\pi nT$ zerlegen [2]. Die Fourier-Transformation der Felder A_μ^a hat also die Gestalt

$$A_\mu^a(x) = \sum_P e^{-iPx} \tilde{A}_\mu^a(P) \quad , \quad \tilde{A}_\mu^a(P) = \int_0^\beta e^{iPx} A_\mu^a(x) \quad (1.12)$$

mit $x = (-i\tau, \vec{r})$ und $P = (i\omega_n, \vec{p})$ sowie den Symbolen

$$\int_0^\beta := \int_0^\beta d\tau \int d^3r \quad , \quad \sum_P := \frac{1}{\beta V} \sum_n \sum_{\vec{p}} \quad . \quad (1.13)$$

In (1.13) wird über diskrete \vec{p} summiert. Für $V \rightarrow \infty$ wird \vec{p} kontinuierlich: $\sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p$. Die n -Summe läuft über ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Die Zustandssumme (1.8) läßt sich als Produkt aus Z_0 und Z_{int} schreiben. Dazu werden zu \mathcal{L}_0 drei Quellterme $J^{\mu a} A_\mu^a$, $j_1^a c_1^a$, $j_2^a c_2^a$ ($j_{1,2}$ sind wie $c_{1,2}$ Grassmann-Felder) addiert, wodurch die Felder in \mathcal{L}_{int} durch Funktionalableitungen ersetzt werden können [1, 28].

Daraufhin kann der Wechselwirkungsanteil (jetzt mit \mathcal{Q} bezeichnet) vor das Funktionalintegral gezogen werden :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{Z_\alpha} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\{A_\mu^a, c_1^a, c_2^a\} e^{f^\beta \mathcal{L}} \\ &= \left[e^{\mathcal{Q}} \frac{1}{Z_\alpha} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\{A_\mu^a, c_1^a, c_2^a\} e^{f^\beta (\mathcal{L}_0 + J^{\mu a} A_\mu^a + j_1^a c_1^a + j_2^a c_2^a)} \right]_{J, j_{1,2}=0} . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Der Operator \mathcal{Q} setzt sich (entsprechend den drei Wechselwirkungstermen in \mathcal{L}) aus drei Anteilen verschiedener g -Ordnung zusammen :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int^\beta \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\{A_\mu^a(x), c_1^a(x), c_2^a(x)\} \rightarrow \sum_P e^{iPx} \{ \mathbb{I}_{\mu P}^a, \bar{\mathbb{I}}_{1P}^a, \bar{\mathbb{I}}_{2P}^a \} \right) \\ &= \mathcal{Q}_G + \mathcal{Q}_D + \mathcal{Q}_V \end{aligned} \quad (1.15)$$

mit

$$\mathcal{Q}_G = igf^{abc} \sum_{K P Q} [K + P + Q] P_\mu \mathbb{I}_K^{\mu c} \bar{\mathbb{I}}_{1P}^b \bar{\mathbb{I}}_{2Q}^a , \quad (1.16)$$

$$\mathcal{Q}_D = igf^{abc} \sum_{K P Q} [K + P + Q] K_\mu \mathbb{I}_{\nu K}^a \mathbb{I}_P^{\mu b} \mathbb{I}_Q^{\nu c} , \quad (1.17)$$

$$\mathcal{Q}_V = -\frac{1}{4} g^2 f^{eab} f^{ecd} \sum_{K L P Q} [K + L + P + Q] \mathbb{I}_{\mu K}^a \mathbb{I}_{\nu L}^b \mathbb{I}_P^{\mu c} \mathbb{I}_Q^{\nu d} \quad (1.18)$$

($\mathcal{Q}_G \hat{=}$ Geist-Vertex, $\mathcal{Q}_D \hat{=}$ Gluon-Dreiervertex, $\mathcal{Q}_V \hat{=}$ Gluon-Vierervertex, siehe auch Anhang B). In (1.15) und den nachfolgenden Gleichungen für die \mathcal{Q} -Operatoren haben wir mit

$$[P] := \beta V \delta_{n,0} \delta_{\vec{p},0} \quad (1.19)$$

und

$$\mathbb{I}_{\mu P}^a := \beta V \delta_{\tilde{J}^{\mu a}(P)} , \quad \bar{\mathbb{I}}_{1P}^a := \beta V \delta_{\tilde{J}_1^a(P)} , \quad \bar{\mathbb{I}}_{2P}^a := \beta V \delta_{\tilde{J}_2^a(P)} . \quad (1.20)$$

das thermische Kronecker-Symbol und drei „Staboperatoren“ eingeführt [30, 28] (für kontinuierliche \vec{p} geht $V \delta_{\vec{p},0}$ in $(2\pi)^3 \delta(\vec{p})$ über).

In (1.14) ist die Wechselwirkung vor das Funktionalintegral gezogen und somit vom ungestörten Anteil der Zustandssumme separiert :

$$Z = Z_0 \cdot Z_{\text{int}} \quad (1.21)$$

mit

$$Z_0 = \frac{1}{Z_\alpha} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\{A_\mu^a, c_1^a, c_2^a\} e^{f^\beta \mathcal{L}_0} \quad (1.22)$$

und

$$Z_{\text{int}} = [e^{\mathcal{Q}} W_0]_{J, j_{1,2}=0} \quad (1.23)$$

wobei

$$W_0 = \frac{\int \mathcal{D}\{A_\mu^a, c_1^a, c_2^a\} e^{f^\beta(\mathcal{L}_0 + J^{\mu a} A_\mu^a + j_1^a c_1^a + j_2^a c_2^a)}}{\int \mathcal{D}\{A_\mu^a, c_1^a, c_2^a\} e^{f^\beta \mathcal{L}_0}} \quad (1.24)$$

ist. W_0 ist eine Funktion der Quellfelder mit $W_0(J^{\mu a} = j_1^a = j_2^a = 0) = 1$.

Entwickeln der e -Funktion in (1.23) überführt Z_{int} in eine Störungsreihe nach g^2 -Potenzen. Die Terme einer beliebigen Ordnung g^{2n} werden durch Feynman-Diagramme dargestellt. Wie sich diese durch Anwendung der n Operatoren \mathcal{Q} auf W_0 generieren, wird in [28] (dortiger Anhang A) erläutert.

Während die Störungsreihe von (1.23) auch nicht-zusammenhängende Diagramme erfaßt, besteht der Logarithmus $\ln(Z_{\text{int}})$ nur aus zusammenhängenden Diagrammen¹. Dies läßt sich zeigen mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen [26] mit dem Ergebnis $Z_{\text{int}} = \exp \left\{ \left[(e^{\mathcal{Q}} - 1) W_0 \right]_{j=0, \text{con}} \right\}$, wobei die geschwungene Klammer alle denkbaren zusammenhängenden Diagramme einschließt. Wegen

$$\ln(Z_{\text{int}}) = \left[e^{\mathcal{Q}} W_0 - 1 \right]_{j, j_{1,2}=0, \text{con}} \quad . \quad (1.25)$$

besteht sowohl die Störungsreihe für den Druck $p = \frac{1}{\beta V} \ln(Z)$ als auch jene für die Gluon-Selbstenergie $\Pi^{\mu\nu}(P) = \frac{2}{\eta} \delta_{G_{\mu\nu}(P)} \ln(Z)$ nur aus zusammenhängenden Diagrammen. Die Übersetzung der Diagramme in Formelsprache läßt sich anhand von den in Anhang B angegebenen Graphenregeln leicht durchführen.

Während in \mathcal{L}_{int} (und somit auch in \mathcal{Q}) Gluon- und Geist-Felder miteinander gekoppelt sind (siehe (1.11)), läßt sich \mathcal{L}_0 aufspalten in $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^{\text{Gluon}} + \mathcal{L}_0^{\text{Geist}}$. Daher kann sowohl Z_0 als auch W_0 als Produkt eines Gluon- und Geist-Anteils geschrieben werden. Fourier-Transformation der Felder und Übergang $\tilde{A}^{\mu a} \rightarrow \tilde{A}^{\mu a} + G_0^{\mu\nu} \tilde{J}_\nu^a$ bzw. $\tilde{c}_{1,2}^a \rightarrow \tilde{c}_{1,2}^a \mp \tilde{j}_{2,1}^a / P^2$ überführt (1.22) und (1.24) in

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_0^{\text{Gluon}} \cdot Z_0^{\text{Geist}} \\ &= \frac{1}{Z_\alpha} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\tilde{A}_\mu^a e^{-\frac{1}{2} \sum \tilde{A}_\mu^a (-P) G_0^{-1 \mu\nu}(P) \tilde{A}_\nu^a(P)} \int \mathcal{D}\{\tilde{c}_1^a, \tilde{c}_2^a\} e^{-\sum \tilde{c}_2^a (-P) (-P^2) \tilde{c}_1^a(P)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

und

$$W_0 = W_0^{\text{Gluon}} \cdot W_0^{\text{Geist}} = e^{\frac{1}{2} \sum \tilde{J}_\mu^a (-P) G_0^{\mu\nu}(P) \tilde{J}_\nu^a(P)} e^{\sum \tilde{j}_2^a (-P) \frac{-1}{P^2} \tilde{j}_1^a(P)} \quad . \quad (1.27)$$

Darin ist

$$G_0^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{P^2} \left(g^{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) \quad (1.28)$$

der nackte Gluon-Propagator.

¹Ein Diagramm heißt „zusammenhängend“ (*connected*, abgekürzt *con*), wenn alle Diagrammteile durch Linien miteinander verbunden sind, andernfalls ist es „nicht-zusammenhängend“ (*disconnected*).

1.4 Regularisierung

Die störungstheoretische Behandlung der Thermodynamik einer masselosen Feldtheorie führt zu ultraviolett- (UV-) und infrarot- (IR-) divergenten Ausdrücken [2, 31].

1.4.1 IR-Regularisierung

Um die Theorie von IR-Divergenzen freizuhalten, muß \mathcal{L}_0 einen Massenterm erhalten [2, 1, 25]. Um die tatsächliche Masselosigkeit der Theorie wieder herzustellen, wird dieser Massenterm als Wechselwirkung wieder subtrahiert [19, 14]. Dies führt zu einer Umordnung der Störungsreihe, in der nun alle Terme IR-konvergent sind. Explizit wird (1.11) folgendermaßen abgeändert :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2} A^{\mu a} (\mathbf{Y} A^a)_\mu \quad , \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &\rightarrow \mathcal{L}_{\text{int}} - \frac{1}{2} A^{\mu a} (\mathbf{Y} A^a)_\mu\end{aligned}\quad (1.29)$$

mit \mathbf{Y} als IR-Regulator. Im Impulsraum ist $(\mathbf{Y} A^a)^\mu = \sum_P e^{-iPx} \mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) A_\nu^a(P)$. Der Umgang mit impulsabhängigen IR-Regulatoren ist ausführlich in [30, 28] behandelt.

Die allgemeinste Form des Regulators $\mathbf{Y}(P)$ ist die Linearkombination

$$\mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) = Y_t(P) \mathbf{A}^{\mu\nu}(P) + Y_\ell(P) \mathbf{B}^{\mu\nu}(P) + Y_c(P) \mathbf{C}^{\mu\nu}(P) + Y_d(P) \mathbf{D}^{\mu\nu}(P) \quad . \quad (1.30)$$

Die Projektoren \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} sind die Elemente einer impulsabhängigen Basis der symmetrischen Lorentz-Matrizen [11, 32, 33]:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(P) &= \mathbf{g} - \mathbf{B}(P) - \mathbf{D}(P) \quad , \\ \mathbf{B}(P) &= \frac{\tilde{P} \circ \tilde{P}}{-P^2} \quad , \quad \mathbf{C}(P) = \frac{P \circ \tilde{P} + \tilde{P} \circ P}{-\sqrt{2} P^2} \quad , \quad \mathbf{D}(P) = \frac{P \circ P}{P^2} \quad .\end{aligned}\quad (1.31)$$

Hierin ist $\tilde{P} = (P_0 P - P^2 U)/p$. $U = (1, \vec{0})$ ist die Vierergeschwindigkeit des ruhenden Wärmebades und \mathbf{g} der metrische Tensor. \tilde{P} und P sind orthogonal, d.h. $\tilde{P} P = 0$. Einige wichtige Relationen zwischen den Basis-Matrizen sind im Anhang C zusammengestellt.

Im folgenden darf $Y_c = Y_d = 0$ gesetzt werden. Der so reduzierte IR-Regulator erfüllt die Transversalitätsbedingung $P_\mu \mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) = 0$. Auch ohne Y_c und Y_d treten in der mit (1.30) regularisierten Störungsreihe keine IR-Divergenzen auf (zumindest in niedrigen Ordnungen, siehe [15] und Kapitel 3, 4). Anders als in [28, 30] kürzen sich mit dem reduzierten IR-Regulator die zwei-Gluon-reduziblen² Diagramme nicht heraus. Sofern Y_ℓ und Y_t für $P_0 = 0$ die Werte der thermisch generierten elektro- bzw. magnetostatischen Masse annehmen, wird dieser Umstand im folgenden dennoch zu keiner Ordnungsreduktion führen.

²Ein Diagramm ist zwei-Gluon-reduzibel (2PR), wenn es beim Zerschneiden zweier verschiedener Gluon-Linien in zwei Teile zerfällt (Genauer: Ein 2PR-Diagramm hat mindestens zwei Gluon-Propagatoren mit gleichem Impuls). Bleibt es zusammenhängend, dann ist es zwei-Gluon-irreduzibel (2PI).

Wegen des Massenterms in \mathcal{L}_0 wird der Gluon-Propagator mit Y_t und Y_ℓ korrigiert :

$$G^{\mu\nu}(P) = \frac{\mathbf{A}^{\mu\nu}(P)}{P^2 - Y_t(P)} + \frac{\mathbf{B}^{\mu\nu}(P)}{P^2 - Y_\ell(P)} + \alpha \frac{\mathbf{D}^{\mu\nu}(P)}{P^2} . \quad (1.32)$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, befriedigt G die Ward-Identität $P_\mu G^{\mu\nu}(P) P_\nu = \alpha$ [34]. Hätten wir Y_c und Y_d nicht Null gesetzt, dann hätte der α -Term in (1.32) eine weitaus kompliziertere Form [28].

Der inverse Propagator G^{-1} bestimmt sich aus $G^{-1\mu\nu} G_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$. Es folgt

$$\begin{aligned} G^{-1\mu\nu}(P) &= (P^2 - Y_t(P)) \mathbf{A}^{\mu\nu}(P) + (P^2 - Y_\ell(P)) \mathbf{B}^{\mu\nu}(P) + \frac{1}{\alpha} P^2 \mathbf{D}^{\mu\nu}(P) \quad \text{bzw.} \\ G^{-1\mu\nu}(P) &= G_0^{-1\mu\nu}(P) - \mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) \quad , \quad G_0^{-1\mu\nu}(P) = P^2 g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) P^\mu P^\nu \quad . \end{aligned} \quad (1.33)$$

Der Massenterm in \mathcal{L}_{int} bewirkt einen weiteren Term in \mathcal{Q} (siehe (1.15)): $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_G + \mathcal{Q}_D + \mathcal{Q}_V + \mathcal{Q}_Y$ mit

$$\mathcal{Q}_Y = -\frac{1}{2} \sum_P \mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) \Big|_{\mu P}^a \Big|_{\nu - P}^a . \quad (1.34)$$

In den Diagrammen erscheint diese Wechselwirkung als Kreuzchen in den Gluon-Linien.

1.4.2 UV-Regularisierung

Zur Behandlung der UV-divergenten Integrale wird üblicherweise die vergleichsweise einfache und elegante Methode der dimensional Regularisierung verwendet [6, 35]. Hierbei wird die Lagrange-Dichte auf d Dimensionen verallgemeinert, wobei d auch komplex sein darf. d wird so gewählt, daß die Integrale endlich werden (z.B. ist $\sum_P G(P)$ für $d < 2$ endlich). Nach Auswertung der Integrale wird d analytisch fortgesetzt zu den üblichen vier Raumzeit-Dimensionen. Dabei werden Pole im (komplexen) d -Raum umgangen, was einer Absorption der Divergenzen in die renormierten physikalischen Parameter (hier insbesondere die Kopplungskonstante) gleich kommt. Der Vorteil dimensionaler Regularisierung im Vergleich zu anderen Regularisierungsmethoden (z.B. der Pauli-Villars Regularisierung) ist, daß sie alle Eigenschaften der Theorie bewahrt, welche unabhängig von der Dimension sind. Diese Eigenschaften sind bei der YM-Theorie insbesondere die Eichinvarianz und die Ward-Identitäten.

Auf die Renormierungsprozedur soll hier nicht näher eingegangen werden. Zu diesem Thema existiert umfangreiche Literatur, wie z.B. [6, 35]. Eine kurze Einführung, speziell bezogen auf die ϕ^4 -Theorie, findet sich auch in [28].

Die Felder und die Kopplungskonstante in (1.11) sind zunächst nackte und damit divergente Größen. Die Renormierung dieser Größen separiert die Divergenzen. Der endliche Anteil stellt die jeweilige meßbare und damit physikalische Größe dar. Mit dem divergenten Anteil werden die Divergenzen der *loop*-Integrale beseitigt. Die Verbindung zwischen nackten und physikalischen Größen wird durch Renormierungsparameter Z hergestellt,

welche Ordnung für Ordnung erhalten werden. Hier gibt es, entsprechend dem Gluon–Feld, dem Geistfeld und der Kopplungskonstante, drei solcher Parameter: Z_A , Z_c , Z_g . Mit diesen erhält die Lagrange–Dichte (1.11) die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}Z_A F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha}Z_A (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + Z_c c_1^a \partial^\mu \partial_\mu c_2^a + gZ_g^{1/2} Z_A^{1/2} Z_g f^{abc} c_1^a \partial^\mu A_\mu^b c_2^c \\ & - gZ_g^{1/2} Z_A^{3/2} f^{abc} (\partial^\mu A^{\nu a}) A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}g^2 Z_g Z_A^2 f^{eab} f^{ecd} A^{\mu a} A^{\nu b} A_\mu^c A_\nu^d . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Die hierin enthaltene Kopplungskonstante und Felder sind jetzt renormierte, also endliche Größen.

Die Renormierungsparameter haben alle die gleiche Struktur, nämlich $Z_i = 1 + \mathcal{O}(g^2)$, wobei Terme ab $\mathcal{O}(g^2)$ divergieren. Damit läßt sich \mathcal{L} schreiben als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ren}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}} . \quad (1.36)$$

\mathcal{L}_{ren} ist (1.11), jedoch mit renormierter Kopplungskonstante und Feldern. $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$ enthält die sogenannten *counter terms*, also jene Terme, welche die Divergenzen der *loop*–Integrale absorbieren. Aus (1.35) geht hervor, daß sich die *counter terms* von den Termen in \mathcal{L}_{ren} lediglich durch einen divergenten Faktor unterscheiden.

Wir regularisieren die Theorie im sogenannten minimalen Subtraktionsschema (MS–Schema) [6]. Die Dimension sei $d = 1 + (3 - 2\varepsilon)$ mit $0 \leq \varepsilon \leq 2$. Damit die renormierte Kopplungskonstante auch bei um 2ε verringerter Dimension dimensionslos bleibt, ist der Übergang $g \rightarrow g\mu^\varepsilon$ erforderlich. μ wird als Subtraktionspunkt bezeichnet. Er hat die Dimension einer Masse und legt die Renormierungsskala fest. Die Renormierungsfaktoren Z_1 , Z_2 und Z_3 hängen lediglich über die Kopplungskonstante von μ ab. Ein in der Störungsreihe explizit auftauchendes μ muß von der μ –Abhängigkeit der Kopplungskonstanten kompensiert werden, so daß die störungstheoretisch erhaltene physikalische Größe (z.B. der Druck) nicht von der Massenskala μ abhängt. Wie sich die Kopplungskonstante bei einer Änderung der Massenskala verhalten muß, darüber gibt die sogenannte Beta–Funktion Auskunft (*running coupling constant*, siehe [6]).

1.5 Anregungen im Gluon–Plasma

1.5.1 Lineare Antwort– und thermische Greens–Funktion

Das von äußeren Einflüssen vollständig abgeschlossene Gluon–System befindet sich im thermischen Gleichgewicht. Eine von außen herbeigeführte infinitesimale Störung, zum Beispiel durch einen Strom $J_\mu^a(x)$, führt zu einer Abweichung $\delta A_\mu^a(x)$ des Feldes $A_\mu^a(x)$ vom Gleichgewicht. Wird der Strom adiabatisch eingeschaltet, $J_\mu^a(x) = e^{\varepsilon t} j_\mu^a(x)$, antwortet das System mit $\delta A_\mu^a(x) = e^{\varepsilon t} a_\mu^a(x)$. Der allgemeinste lineare Zusammenhang zwischen Antwort a und Ursache j ist

$$a_\mu^a(x) = \int d^4 x' \chi_{\mu\nu}^{ab}(x - x') j^{\nu b}(x') . \quad (1.37)$$

Darin wird $\chi_{\mu\nu}^{ab}(x-x') = i \Theta(t-t') e^{-\varepsilon(t-t')} \langle [A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] \rangle$ als lineare Antwort-Funktion bezeichnet (gemittelt wird über sämtliche Eigenzustände des Hamilton-Operators des Gluon-Systems). Eine Herleitung von χ ist in [1, 2] zu finden.

Eine Fourier-Transformation überführt die Antwort-Funktion χ in den Impulsraum. Dort läßt sie sich in spektraler Darstellung umschreiben :

$$\chi_{\mu\nu}^{ab}(\omega, \vec{q}) = \int dz \frac{A_{\mu\nu}^{ab}(z, \vec{q})}{z - \omega - i\varepsilon} . \quad (1.38)$$

Die hierin enthaltene spektrale Dichte $A_{\mu\nu}^{ab}$ läßt sich kompakt aufschreiben [36]. Sie enthält die exakten Eigenzustände und Eigenwerte des Hamilton-Operators der YM-Theorie und ist unabhängig von der Frequenz ω .

Auch die thermischen Green'schen-Funktionen $G_{\mu\nu}^{ab}(x) = \langle \mathcal{T} A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \rangle$ auf der Matsubara-Kontour lassen sich im Impulsraum in spektraler Darstellung schreiben :

$$G_{\mu\nu}^{ab}(i\omega_n, \vec{q}) = \int dz \frac{A_{\mu\nu}^{ab}(z, \vec{q})}{z - i\omega_n} . \quad (1.39)$$

Darin sind $\omega_n = 2\pi nT$ die Matsubara-Frequenzen. Ein Vergleich mit (1.38) zeigt den Zusammenhang mit der linearen Antwort-Funktion :

$$\chi(\omega, \vec{q}) = G(i\omega_n \rightarrow \omega + i\varepsilon, \vec{q}) . \quad (1.40)$$

Besteht die Störung nur aus einem kurzen Impuls $j_\mu^a(x) = j_\mu^a(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \delta(t)$, dann ist die Antwort des Systems

$$a_\mu^a(x) = j^\nu{}^b(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{2\pi} \int dq_0 \chi_{\mu\nu}^{ab}(q_0, \vec{q}) e^{iq_0 t} . \quad (1.41)$$

Wegen $\Theta(t-t')$ in χ , darf die verbleibende Integration in der unteren Hälfte der komplexen q_0 -Ebene geschlossen werden. Damit wird deutlich, daß die Störung nur dann eine Antwort des Gluon-Systems bewirkt, wenn χ Polstellen hat. Dies ist beim Gluon-Propagator nach analytischer Fortsetzung $i\omega_n \rightarrow \omega + i\varepsilon$ der Fall.

1.5.2 Gluon-Dispersion

Die Pole des Gluon-Propagators lassen sich als Funktion $\omega(q)$ graphisch auftragen. Im Falle des nackten (freien) Gluon-Propagators G_0 (siehe (1.28)) erhält man als Dispersionskurve den Lichtkegel.

Der volle Gluon-Propagator \overline{G} ergibt sich als Lösung der Dyson-Gleichung

$$\overline{G}^{\mu\nu}(Q) = G_0^{\mu\nu}(Q) + G_0^{\mu\rho}(Q) \Pi_{\rho\sigma}(Q) \overline{G}^{\sigma\nu}(Q) . \quad (1.42)$$

Die allgemeine Gestalt der Gluon-Selbstenergie lautet $\Pi = \Pi_t \mathbf{A} + \Pi_\ell \mathbf{B} + \Pi_c \mathbf{C} + \Pi_d \mathbf{D}$ (für $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ siehe (1.31)). Für *soft* Q und in führender Ordnung reduziert sie sich auf

$\Pi = \Pi_t \mathbf{A} + \Pi_\ell \mathbf{B}$. In diesem Fall folgt aus der Dyson–Gleichung

$$\overline{G}^{\mu\nu}(Q) = \frac{\mathbf{A}^{\mu\nu}(Q)}{Q^2 - \Pi_t(Q)} + \frac{\mathbf{B}^{\mu\nu}(Q)}{Q^2 - \Pi_\ell(Q)} + \alpha \frac{\mathbf{D}^{\mu\nu}(Q)}{Q^2} . \quad (1.43)$$

Hierin ist Π_t die transversale und Π_ℓ die longitudinale Selbstenergie. Die Pole von \overline{G} beschreiben die Anregungen des Gluon–Plasmas. Die transversalen Anregungen erhält man als Lösung der Dispersionsrelation

$$\omega_t^2 - q^2 = \Pi_t(\omega_t, q) . \quad (1.44)$$

Entsprechend folgt die longitudinale Anregung, das sogenannte Plasmon, aus

$$\omega_\ell^2 - q^2 = \Pi_\ell(\omega_\ell, q) . \quad (1.45)$$

Diese Anregung verschwindet für $T = 0$. Die Lösungen beider Dispersionsrelationen sind eichunabhängig [37, 1], so daß es sich tatsächlich um physikalische Anregungen handelt. In führender Ordnung lassen sich die Selbstenergien Π_ℓ und Π_t auswerten [38, 11] :

$$\begin{aligned} \Pi_\ell(Q_0, q) &= 3m_0^2 \left(1 - \frac{Q_0^2}{q^2} \right) \left(1 - \frac{Q_0}{2q} \ln \left(\frac{Q_0 + q}{Q_0 - q} \right) \right) , \\ \Pi_t(Q_0, q) &= \frac{3}{2}m_0^2 - \frac{1}{2}\Pi_\ell(Q_0, q) \end{aligned} \quad (1.46)$$

mit $m_0^2 = \frac{1}{9}g^2NT^2$.

Die Dispersionskurven zu den Relationen (1.44) und (1.45) sind in Abbildung 1.1 dargestellt [12]. Für $q^2 \geq 0$ lassen sich die Schwingungen $\omega_{t,\ell}(q)$ des Systems ablesen. Für $q = 0$ haben beide Schwingungen die gleiche Frequenz, die sogenannte Plasma–Frequenz $\omega_{t,\ell}^2(q = 0) = m_0^2$. Für $q \rightarrow \infty$ nähert sich die longitudinale Kurve dem Lichtkegel $\omega_\ell^2 \rightarrow q^2$, während die transversale Kurve das asymptotische Verhalten $\omega_t^2 \rightarrow q^2 + m_\infty^2$ zeigt. Darin wird $m_\infty^2 = \frac{3}{2}m_0^2$ als asymptotische Masse bezeichnet [38].

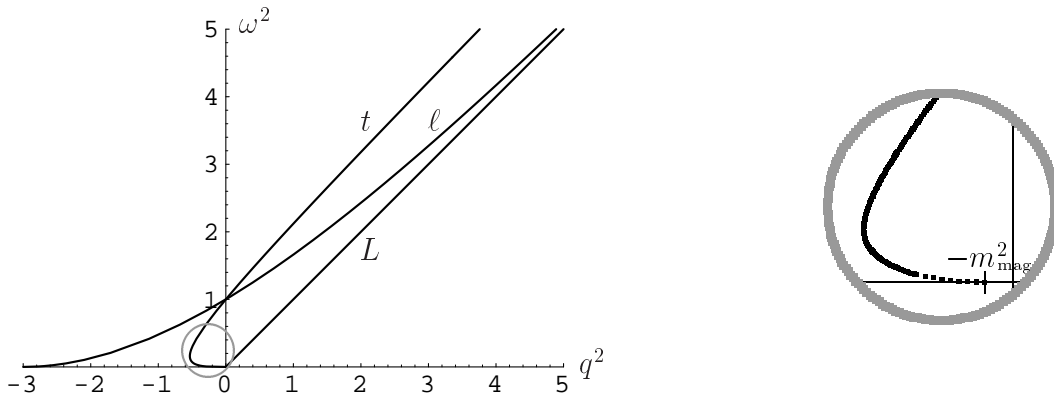


Abbildung 1.1: Die Dispersion des Gluons in Einheiten der Plasma–Frequenz m_0^2 . Der Lichtkegel ist mit L gekennzeichnet. Während die longitudinale Dispersionskurve (ℓ) im statischen Limes den endlichen Wert $-q^2 = 3m_0^2 = m_{\text{el}}^2$ annimmt, erreicht die transversale Kurve (t) für $\omega \rightarrow 0$ in führender Ordnung den Ursprung. Erst bei Hinzunahme höherer Störungsordnungen (rechte Seite) erkennt man, daß auch die transversale Dispersionskurve im statischen Limes bei einem endlichen Wert $-q^2 = m_{\text{mag}}^2$ einmündet.

Der Bereich $q^2 < 0$ kann als Abschirmung der Felder gedeutet werden, wobei $q^{-1}(\omega_{t,\ell})$ die Abschirmlängen für die chromomagnetischen bzw. chromoelektrischen Wechselwirkungen angibt, welche beide nicht langreichweitig sind. Physikalische Bedeutung haben unterhalb der Plasma-Frequenz aber nur zwei Punkte, nämlich jene bei $\omega = 0$. Sie ergeben sich aus (1.45) und (1.44) aus den Gleichungen

$$m_{\text{el}}^2 = \Pi_\ell(0, q)|_{-q^2=m_{\text{el}}^2} \quad \text{und} \quad m_{\text{mag}}^2 = \Pi_t(0, q)|_{-q^2=m_{\text{mag}}^2} \quad (1.47)$$

und bestimmen die Abschirmmassen. Die chromoelektrische Masse (auch als Debye Masse bezeichnet) ist in führender Ordnung $m_{\text{el}} = \sqrt{3} m_0 = \sqrt{N/3} gT$. Die chromomagnetische oder kurz magnetische Masse m_{mag} verschwindet dagegen in führender Ordnung.

Da die rechte Gleichung in (1.47) auch dann noch verschwindet, wenn in Π_t g^3 -Terme berücksichtigt werden [39, 12], ist die Stabilität von Störungsreihen in thermischer QCD nicht mehr selbstverständlich. Ist nämlich $m_{\text{mag}}^2 \sim g^4 T^2$, so existiert zwar eine Entwicklung in g , jedoch entstehen unendlich viele Terme gleicher Größenordnung. Sollte gar $m_{\text{mag}}^2 \ll g^4 T^2$ sein, dann existiert keine Störungsentwicklung mehr [18, 19].

Inzwischen konnte aus analytischen Abschätzungen [17] und Gitterrechnungen [40] die Größenordnung $m_{\text{mag}} \sim g^2 T$ für die magnetische Masse bestätigt werden. Wie A. Linde bereits 1980 vorhersagte [18], hat diese Größenordnung der magnetischen Masse die Folge, daß in einer störungstheoretischen Entwicklung des Druckes ab $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ und der Gluon-Selbstenergie ab $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ unendlich viele Diagramme beitragen. An dieser Berechenbarkeitsschwelle scheiterte bislang ein weiteres Auswerten der Störungsreihen. Dies könnte sich mit den neuerlichen Arbeiten [21, 22, 23] von D. Karabali, C. Kim und V.P. Nair ändern. Sie konnten die Yang-Mills-Theorie in 2+1 Dimensionen und $T = 0$ nicht-störungstheoretisch analysieren. Mit dieser Theorie beschäftigen wir uns im zweiten Kapitel.

1.6 Das Linde-Problem

A. Linde hat in seinen 1979/80 erschienenen Publikationen [18] beschrieben, unter welchen Umständen in einer diagrammatischen Entwicklung des Druckes unendlich viele Diagramme die gleiche Größenordnung $g^6 T^4$ besitzen können. Die nachfolgende Abschätzung der Größenordnung von Selbstenergie-Diagrammen läßt sich auf beliebige n -Punkt-Funktionen (n -beinige Diagramme) verallgemeinern. Wir folgen hier der Argumentation in [19], welche sich von jener in [18] ein wenig unterscheidet.

Wir betrachten ein zwei-Gluon-reduzibles (2PI-) Selbstenergie-Diagramm beliebig hoher *loop*-Ordnung mit ausschließlich gluonischen Linien. Der äußere Impuls Q sei statisch und *supersoft*, d.h. $Q = (0, \vec{q})$ mit $q \sim g^2 T$. Von diesem beliebigen Diagramm separieren wir den rein räumlichen Anteil. Das ist jener, in dem alle Gluon-Propagatoren nur aus ihrem transversalen Sektor bestehen und für alle inneren Impulse $P_0 = 0$ gilt. Die thermische Summe (1.13) reduziert sich für $P_0 = 0$ zu $\frac{T}{(2\pi)^3} \int d^3 p =: T \int_p^3$ und der

transversale Gluon-Propagator (ohne α -Term) hat die Gestalt

$$-\Delta_\tau(p) \mathbf{A}^{\mu\nu}(\vec{p}) = -\frac{\mathbf{A}^{\mu\nu}(\vec{p})}{p^2 + \tau^2}, \quad (1.48)$$

wobei $\mathbf{A}^{\mu\nu}(\vec{p}) := \mathbf{A}^{\mu\nu}(P_0 = 0, \vec{p}) = \mathbf{A}^{\mu\nu}(P)$ gilt (siehe Anhang C). Die Regulatormasse τ sei bis auf die Größenordnung $\sim g^2 T$ beliebig.

Die *loop*-Ordnung des hier betrachteten beliebigen 2PI-Diagramms wird von n auf $n + 1$ erhöht, wenn man auf beliebige Weise (jedoch so, daß wieder ein 2PI-Diagramm entsteht) eine weitere Gluon-Linie Δ_τ einzieht. Weil ein ausschließlich aus Gluon-Linien bestehendes Diagramm nur zwei Sorten Vertizes enthält, sind genau drei Fälle möglich, von denen zwei in Abbildung 1.2 veranschaulicht sind:

1. Die Gluon-Linie wird so eingezogen, daß zwei zusätzliche Gluon-3er-Vertizes entstehen.
2. Die Gluon-Linie wird so eingezogen, daß ein vorhandener 3er-Vertex zu einem 4er-Vertex wird und zudem ein 3er-Vertex entsteht.
3. Die Gluon-Linie wird so eingezogen, daß aus zwei vorhandenen 3er-Vertizes jeweils 4er-Vertizes werden.

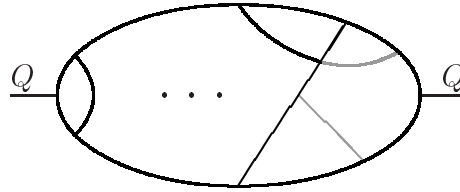


Abbildung 1.2: Ein beliebiges 2PI-Selbstenergie-Diagramm n -ter Ordnung mit statischem *supersoft* äußeren Impuls Q . Durch das Einziehen einer weiteren Gluon-Linie Δ_τ (eine der beiden grauen) wird die Größenordnung des Diagramms nicht verändert.

Im ersten Fall erhält das Diagramm neben der zusätzlichen *loop*-Integration $T \int_p^3$ zwei zusätzliche 3er-Vertizes der Größenordnung gp (siehe Anhang B) und drei weitere Propagatoren der Form $\Delta_\tau(p)$. Die Größenordnung dieses zusätzlichen Beitrages läßt sich leicht abschätzen: $\sim g^2 T \int_p^3 p \cdot p \Delta_\tau^3(p) \sim g^2 T / \tau \sim 1$, da $\tau \sim g^2 T$.

Im zweiten Fall bleibt die Anzahl der 3er-Vertizes gleich, die Anzahl der 4er-Vertizes erhöht sich um 1 (Größenordnung g^2) und die Anzahl der Gluon-Propagatoren wächst um 2. Damit folgt für die Größenordnung des zusätzlichen Beitrages: $\sim g^2 T \int_p^3 \Delta_\tau^2(p) \sim g^2 T / \tau \sim 1$.

Im dritten Fall wird die Anzahl der 3er-Vertizes um 2 verringert. Um die gleiche Zahl erhöht sich die Anzahl der 4er-Vertizes. Die Gesamtzahl der Vertizes bleibt also unverändert, so daß die eingezogene Gluon-Linie keine weiteren zusätzlichen Linien bewirkt. Wie in den anderen beiden Fällen hat auch dieser Beitrag die Größenordnung 1.

Damit wird anhand der Abschätzung von Größenordnungen deutlich, daß der rein räumliche Anteil, der sogenannte Linde-See, jedes beliebigen Selbstenergie-Diagramms zu

ein und der selben Ordnung beiträgt. Diese ist, wie sich z.B. anhand der 1-*loop* Diagramme prüfen läßt, $\sim g^4 T^2$.

Obige Abschätzung der Größenordnung kann auf Diagramme mit beliebiger Anzahl von Beinen erweitert werden. Insbesondere folgt, daß der rein räumliche Anteil (der Linde–See) eines beliebigen Druck–Diagramms die Größenordnung $\sim g^6 T^4$ besitzt. Die störungstheoretische Berechenbarkeitsschwelle beim Druck liegt damit bei $\mathcal{O}(g^6 T^4)$. Bei Dreipunkt–Funktionen versagt Störungsrechnung ab $\mathcal{O}(g^3 T)$ und bei Vierpunkt–Funktionen bereits in führender Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$.

Diese Übereinstimmung der Größenordnung des räumlichen Anteils aller Diagramme geht verloren, sobald mindestens ein innerer Impuls *soft* ($\sim gT$) oder *hard* ($\sim T$) ist. Dann sind alle Beiträge aus Selbstenergie–Diagrammen mit drei und mehr *loops* kleiner als $g^4 T^2$ und alle Beiträge aus Druck–Diagrammen mit fünf und mehr *loops* kleiner als $g^6 T^4$.

Der oben behandelte rein räumliche Anteil der Diagramme wird mit einer neuen Kopplungskonstante e ($e^2 := g^2 T$) vollständig durch die YM–Theorie in drei euklidischen Dimensionen bei $T = 0$ erfaßt. Kann dieser nicht–störungstheoretisch erhalten werden, dann ist die genannte Berechenbarkeitsschwelle überwunden, da alle anderen Beiträge in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ (Selbstenergie) bzw. $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ (Druck) störungstheoretisch behandelt werden können.

Kapitel 2

Die Karabali–Nair–Theorie

Wie aus Abschnitt 1.6. hervorgeht, kann der rein räumliche Anteil der 3+1D Yang–Mills–Theorie störungstheoretisch nicht behandelt werden, da unendlich viele Diagramme die gleiche Störungsordnung besitzen. Dieser räumliche Anteil (der Linde–See) ist mit $e^2 := g^2 T$ dreidimensionale Euklidische YM–Theorie bei $T = 0$. Wick–Rotation überführt diese in eine 2+1D YM–Theorie mit e als Kopplung.

In den Jahren 1996 bis 1998 haben D. Karabali und V.P. Nair (später zusammen mit C. Kim) mehrere Arbeiten veröffentlicht [21, 22, 23], in denen sie eine nicht–störungstheoretische Behandlung der temperaturlosen 2+1D YM–Theorie vorstellen. Es gelingt Karabali, Kim und Nair (kurz KKN) eine Energielücke $\sim e^2$ zu erhalten. Diese Energielücke sollte via $e^2 = g^2 T$ mit der magnetischen Masse identifiziert werden können, sofern es keine weiteren, störungstheoretisch erzeugten Beiträge gibt (siehe hierzu das nächste Kapitel). In ihrer jüngsten Arbeit [41] versuchen KKN ihre Ergebnisse störungstheoretisch zu interpretieren.

Dieses Kapitel soll einen Einblick in die KKN–Theorie geben. Für thermische Feldtheoretiker handelt es sich hier um recht fremde Strukturen. Es erschien daher nicht sinnvoll, die KKN–Arbeiten lediglich zu zitieren. Die folgenden Abschnitte mögen einen Beitrag zum Verständnis der KKN–Theorie (immerhin eine der Grundlagen der vorliegenden Arbeit) leisten. Eine ausführliche und gut nachvollziehbare Darstellung ist von Schulz verfaßt worden [42]. Kurze Zusammenfassungen finden sich in [43, 44].

2.1 Vom Schrödinger–Funktional zur Energielücke

Das Ziel ist, aus der funktionalen stationären Schrödinger–Gleichung das Energiespektrum für ein einzelnes Gluon zu erhalten. Dazu müssen die Wellenfunktionen ψ normiert und der Hamilton–Operator $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$ auf die physikalischen Freiheitsgrade beschränkt werden. Dieses Kapitel endet mit dem Hamilton–Operator (2.53), aus welchem das gesuchte Spektrum gefolgert werden kann. Das Energiespektrum selber wird kein Bestandteil dieses Kapitels sein, sondern erst im nächsten (Abschnitt 3.4) behandelt werden. Um (2.53) zu erhalten, führen KKN folgende Schritte durch :

- Die Eichfelder A werden mit Matrizen aus $SL(N, C)$ parametrisiert. Dadurch wird ein Wechsel vom Raum \mathcal{A} aller Eichfelder zum Raum \mathcal{M} aller $SL(N, C)$ -Matrizen möglich. Von \mathcal{M} kann der Eichorbit \mathcal{G}_* abgespalten werden. Übrig bleibt der Raum \mathcal{H} , in welchem nur noch physikalische Freiheitsgrade berücksichtigt sind. Nun kann wieder zum Raum der Eichfelder gewechselt werden, welcher jetzt nur noch die physikalischen (nicht durch Umeichung erreichbaren) Felder enthält. Dieser Raum sei mit \mathcal{C} bezeichnet.
- Ist das Volumenelement des Raumes \mathcal{C} bekannt, so können die Wellenfunktionen ψ normiert werden. Das Skalarprodukt zweier eichinvarianter physikalischer Zustände $|1\rangle, |2\rangle$ lautet dann: $\langle 1|2\rangle = \int d\mu(\mathcal{C}) \psi_1^* \psi_2$. Das Volumenelement $d\mu(\mathcal{C})$ enthält die Wess–Zumino–Witten (WZW-) Wirkung für die hermiteschen Matrizen aus \mathcal{H} . Alle Matricelemente $\langle 1|2\rangle$ einer 2+1D $SU(N)$ -Eichtheorie können somit als Korrelatoren eines hermiteschen WZW-Modells ausgedrückt werden.
- In der WZW-Theorie sind die Wellenfunktionen ψ Funktionale des Stromes J , welcher ausschließlich durch Elemente des Raumes \mathcal{H} ausgedrückt werden kann. Es zeigt sich, daß J^a exakte Eigenfunktion zum kinetischen Energie-Operator \mathbf{T} ist: $\mathbf{T}J^a = mJ^a$. Unter Einbeziehung des Potentials \mathbf{V} wird der Eigenwert m verschoben: $\sqrt{m^2 + k^2}$. Eine Energielücke im Spektrum eines einzelnen Gluons, welches durch J^a eichinvariant definiert werden kann, könnte gefunden sein.

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit obigen Punkten. Auf eine detaillierte Darstellung wird der Kürze halber verzichtet. Präzise im Detail wird die KKN-Theorie in [42] behandelt. Dort ist insbesondere die Regularisierung der Theorie nachzulesen, auf welche wir hier überhaupt nicht eingehen werden.

Vorgreifend sei erwähnt, daß KKN zwar den Wert für m angeben können, das Energie-Spektrum $\sqrt{m^2 + k^2}$ für ein einzelnes Gluon aber nur indirekt aus der KKN-Theorie hervorgeht. Die hierfür notwendigen Überlegungen sind von KKN nur halbherzig angestellt worden. Sie werden auch kein Bestandteil dieses Kapitels sein. Die Frage nach der Energielücke im Spektrum eines einzelnen Gluons wird im nächsten Kapitel, wenn wir zur magnetischen Masse kommen, wieder aufgenommen und ausführlicher behandelt.

2.2 Abspalten des Eichorbits

Die Lagrange-Dichte der 2+1D Yang–Mills-Theorie ist formal identisch mit (1.7): $\mathcal{L}_{\text{klass}} = -\frac{1}{4}F_{\bullet\mu\nu}^a F_{\bullet\mu\nu}^a$ mit $F_{\bullet\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. Darin ist e die Kopplungskonstante (e^2 hat die Dimension einer Masse). Die Metrik ist $(+ - -)$ und $\mu, \nu = 0, 1, 2$. Bei Hamilton'schen Formulierungen ist es vorteilhaft in Weyl-Eichung, d.h. $A_0 = 0$ zu arbeiten. Wird die Kopplung e noch in den Feldern versteckt ($eA_j^a \rightarrow A_j^a$, dann nimmt die Lagrange-Dichte folgende Form an:

$$\mathcal{L}_{\text{klass}}^{\text{Weyl}} = \frac{1}{2e^2} \dot{A}_j^a \dot{A}_j^a - \frac{1}{2e^2} B^a B^a \quad (2.1)$$

mit $B^a = \partial_1 A_2^a - \partial_2 A_1^a + f^{abc} A_1^b A_2^c$ und $j = 1, 2$.

2.2.1 Parametrisierung des Eichfeldes

Die Quantisierung der Theorie darf nur physikalische (nicht durch Umeichung erreichbare) Felder betreffen. Um die eichinvarianten Freiheitsgrade separieren zu können, ist es sinnvoll, an Stelle der $2(N^2 - 1) =: 2\eta$ reellen Felder A_j^a , mit nur einem komplexen antihermiteschen Matrix-Feld zu arbeiten :

$$A := \frac{1}{2}(A_1 + iA_2) \quad \text{und} \quad A_j := -iA_j^a T^a \quad . \quad (2.2)$$

Die Generatoren T^a der Eichgruppe $SU(N)$ ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) erfüllen die bekannten Relationen $\text{Sp}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$, $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ und die Umeichung des Matrix-Feldes lautet

$$A \rightarrow A^{(U)} = UAU^{-1} - (\partial U)U^{-1} \quad , \quad U(\vec{r}) = e^{-i\Lambda^a(\vec{r})T^a} \quad , \quad (2.3)$$

wobei $\partial := \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ verwendet wurde. Die kovariante Ableitung erhält mit (2.2) die einfache Gestalt

$$D_j = \partial_j + A_j \quad \text{bzw.} \quad D = \partial + A \quad (2.4)$$

$$(\overline{D} = \overline{\partial} + \overline{A} \quad \text{und} \quad \overline{A} = \frac{1}{2}(A_1 - iA_2) = -A^\dagger).$$

Die Parametrisierung des Eichfeldes läßt sich mit beliebigen Matrizen M aus $SL(N, C)$ durchführen :

$$A := -(\partial M)M^{-1} \quad . \quad (2.5)$$

Daß die einzige Einschränkung $\text{Sp}(A) = 0$ erfüllt ist, läßt sich ausgehend von $\det(M) = 1$ nachprüfen : $0 = \delta \det(M) = \dots = \det(M) \text{Sp}((\partial M)M^{-1})$, [42].

Wird (2.5) in (2.3) eingesetzt, dann läuft eine Umeichung einfach auf $M^{(U)} = UM$ hinaus. Die Kombination

$$H := M^\dagger M \quad (2.6)$$

ist ersichtlich invariant unter Eichtransformationen. Dennoch enthält der Raum \mathcal{M} aller Matrizen M den gesamten Eichorbit. Dieser kann jedoch separiert werden :

$$M =: U\rho \quad \text{mit} \quad \rho = \rho^\dagger \quad . \quad (2.7)$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung zeigt man wie folgt [42] : H ist hermitesch und somit diagonalisierbar. Die Diagonalelemente sind alle echt positiv. Damit läßt sich zeigen, daß zu einer hermiteschen Matrix ρ mit $\det(\rho) = 1$ eine inverse Matrix ρ^{-1} existiert. $M = U\rho$ ist also nach U auflösbar. Es folgt $\det(U) = 1$ und $UU^\dagger = 1$. Die Matrizen U repräsentieren also den Eichorbit \mathcal{G}_* und die hermiteschen Matrizen ρ ($\det(\rho) = 1$) die eichinvarianten Freiheitsgrade. ρ ist positiv definit. Die Matrizen H , für die $H = M^\dagger M = \rho^\dagger \rho = \rho\rho$ gilt, enthalten somit die gleiche Information wie die ρ 's selber. Die physikalischen Felder lassen sich also durch die hermiteschen, eins-determinantischen $N \times N$ Matrizen H beschreiben. Diese bilden den Raum $\mathcal{H} = \mathcal{M}/\mathcal{G}_*$.

2.2.2 Die Metrik im Raum der Eichfelder

Die Metrik des Raumes \mathcal{A} aller Eichfelder ist

$$ds_{\mathcal{A}}^2 = \int d^2r \delta A_j^a \delta A_j^a = 4 \int d^2 \delta A^a \delta A^{a*} = 8 \int d^2r \operatorname{Sp} (\delta A \delta A^\dagger) \quad . \quad (2.8)$$

Aus (2.5) folgt

$$\begin{aligned} \delta A &= -(\partial \delta M) M^{-1} - (\partial M) \delta M^{-1} \\ &= -\partial \delta M M^{-1} - \delta M M^{-1} (\partial M) M^{-1} + (\partial M) M^{-1} \delta M M^{-1} \\ &= -\mathcal{D} \delta M M^{-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

mit $\mathcal{D} := \partial + [A, \]$. Entsprechend ist $\delta A^\dagger = -\overline{\mathcal{D}} M^{\dagger-1} \delta M^\dagger$ mit $\overline{\mathcal{D}} := \bar{\partial} - [A^\dagger, \]$. Damit wird

$$ds_{\mathcal{A}}^2 = 8 \int d^2r \operatorname{Sp} ((\mathcal{D} \delta M M^{-1})(\overline{\mathcal{D}} M^{\dagger-1} \delta M^\dagger)) \quad . \quad (2.10)$$

Die Matrizen M bilden eine Gruppe und gehen daher durch Multiplikation auseinander hervor: $M + \delta M = \{1 + \lambda^a T^a\} M$, mit $\lambda^a \in C$, $\lambda^a := \frac{1}{2}(\lambda_1^a + i\lambda_2^a)$. Die geschweifte Klammer parametrisiert eine infinitesimale Abweichung vom 1-Element. Ausgehend hiervon erschließt sich die Metrik $ds_{\mathcal{M}}^2$. Analog zu (2.8) ist

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = \int d^2r (\lambda_1^a \lambda_1^a + \lambda_2^a \lambda_2^a) = 4 \int d^2r \lambda^a \lambda^{a*} = 8 \int d^2r \operatorname{Sp} (\lambda^a T^a \lambda^b T^b) \quad . \quad (2.11)$$

Da $\lambda^a T^a = \delta M M^{-1}$, erhält die Metrik für \mathcal{M} die Gestalt

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = 8 \int d^2r \operatorname{Sp} (\delta M M^{-1} M^{\dagger-1} \delta M^\dagger) \quad . \quad (2.12)$$

Die Verbindung des Volumenelements des Raumes \mathcal{A} mit jenem des Raumes \mathcal{M} wird durch die Jacobi-Matrix \mathcal{J} hergestellt: $dV(\mathcal{A}) = |\det(\mathcal{J})| dV(\mathcal{M})$. Die Jacobi-Determinante läßt sich aus der Metrik (2.10) erschließen, welche nach Umformung die Gestalt

$$ds_{\mathcal{A}}^2 = 4 \int d^2r (\hat{D}^{ab} \lambda^b)(\hat{D}^{ac*} \lambda^{c*}) \quad (2.13)$$

annimmt. Darin ist $\hat{D}^{ab} := \delta^{ab} \partial - A^c f^{abc}$. Werden zwei der Indizes von den Strukturkonstanten als Matrixindizes gelesen, dann bezeichnen diese die Generatoren der Eichgruppe $SU(N)$ in adjungierter Darstellung: $-if^{abc} = (\hat{T}^a)^{bc}$. Die Differentiation \hat{D} ist also nichts anderes als die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung: $\hat{D}^{ab} = (\hat{\partial} + \hat{A})^{ab}$ mit $\hat{A} = -iA^c \hat{T}^c$. Aus (2.13) folgt nach einigen (hier nicht näher dargelegten) Überlegungen die Jacobi-Determinante in der Darstellung $|\det(\mathcal{J})| = \det(\hat{D}^\dagger \hat{D})$.

Anstelle des Volumenelements dV benutzen KKN das sogenannte Haar-Maß $d\mu = \prod_{\vec{r}} dV$. Für dieses gilt die Beziehung:

$$d\mu(\mathcal{A}) = \det(\hat{D}^\dagger \hat{D}) d\mu(\mathcal{M}) \quad . \quad (2.14)$$

2.2.3 Eichinvariante Freiheitsgrade

Das zur Metrik (2.12) zugehörige Volumenelement ist

$$dV(\mathcal{M}) = \prod_a \lambda_1^a \lambda_2^a \quad . \quad (2.15)$$

Von diesem soll nun das Eichvolumen abgespalten werden. Wir erinnern uns, daß $\lambda^a = 2 \operatorname{Sp}(T^a \delta M M^{-1})$ und $M = U \rho$ mit $\rho = \rho^\dagger$. Damit ist

$$\begin{aligned} \lambda_1^a &= (\lambda^a + \lambda^{a*}) \\ &= 2 \operatorname{Sp} (T^a (\delta U U^\dagger + U \delta \rho \rho^{-1} U^\dagger + U \rho^{-1} \delta \rho U^\dagger + U \delta U^\dagger)) \\ &= 2 \operatorname{Sp} (\bar{T}^a (\delta \rho \rho^{-1} + \rho^{-1} \delta \rho)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

(wegen $UU^\dagger = 1$ entfallen zwei Terme der mittleren Zeile) und

$$\begin{aligned} \lambda_2^a &= -i(\lambda^a - \lambda^{a*}) \\ &= -2i \operatorname{Sp} (T^a (\delta U U^\dagger + U \delta \rho \rho^{-1} U^\dagger - U \rho^{-1} \delta \rho U^\dagger - U \delta U^\dagger)) \\ &= -2i \operatorname{Sp} (\bar{T}^a (\delta \rho \rho^{-1} - \rho^{-1} \delta \rho + 2 U^\dagger \delta U)) \quad . \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\bar{T}^a := U^\dagger T^a U$ stellt eine unitäre Transformation von T^a dar, welche die Eigenschaften der Generatoren (Hermitizität, Orthonormierung, Kommutatorrelationen) bewahrt.

λ_1^a setzt sich additiv aus $\delta \rho \rho^{-1}$ und $\rho^{-1} \delta \rho$ zusammen. Diese Terme sind (mit einem anderen Vorzeichen) auch in λ_2^a zu finden. Sie müssen eine Linearkombination der λ_1^a sein : Mit $dh^a := \lambda_1^a$ und $du^a := -4i \operatorname{Sp} (\bar{T}^a U^\dagger \delta U)$ ist also $\lambda_2^a = Q^{ab} dh^b + du^a$ [42] (die Matrix Q kombiniert die Variablen dh^a so miteinander, daß $\lambda_2^a - du^a$ entsteht). Durch einen Wechsel von den Variablen λ_1^a, λ_2^a zu den neuen Variablen dh^a, du^a bekommt das Volumenelement die Gestalt

$$dV(\mathcal{M}) = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q & 1 \end{pmatrix} \right| \prod_a dh^a du^a = \prod_a dh^a du^a = dV(\mathcal{H}) dV(\mathcal{G}_*) \quad . \quad (2.18)$$

$dV(\mathcal{H})$ ist das Volumenelement des Raumes \mathcal{H} , welcher keine Umeichungen mehr enthält. Die \bar{T}^a sind die Generatoren der Gruppe $SL(N, C)/SU(N)$. Das Haar–Maß für die eichinvarianten Freiheitsgrade folgt mit $H = \rho \rho$ aus (2.18) und (2.16) :

$$d\mu(\mathcal{H}) = \prod_{\vec{r}} \prod_a dh^a = \prod_{\vec{r}} \prod_a 2 \operatorname{Sp} (\bar{T}^a H^{-1/2} dH H^{-1/2}) \quad . \quad (2.19)$$

Jetzt, wo man weiß, daß sich das Eichvolumen abspalten läßt, kann eine infinitesimale Abweichung vom 1–Element der Gruppe der hermiteschen H –Matrizen analog zu den M –Matrizen parametrisiert werden, woraus sich die Metrik erschließen läßt :

$$ds_{\mathcal{H}}^2 = 2 \int d^2 r \operatorname{Sp} (H^{-1} \delta H H^{-1} \delta H) \quad . \quad (2.20)$$

In (2.18) repräsentiert $dV(\mathcal{G}_*)$ den Eichorbit. Das zugehörige Haar-Maß ist $d\mu(\mathcal{G}_*) = \prod_{\vec{r}} dV(\mathcal{G}_*)$. Entsprechend zu $d\mu(\mathcal{H}) = d\mu(\mathcal{M})/d\mu(\mathcal{G}_*)$ ist das Haar-Maß für den Raum \mathcal{C} aller Eichfelder ohne Eichorbit

$$d\mu(\mathcal{C}) = \frac{d\mu(\mathcal{A})}{d\mu(\mathcal{G}_*)} = \frac{\det(\hat{D}^\dagger \hat{D}) d\mu(\mathcal{M})}{d\mu(\mathcal{G}_*)} = \det(\hat{D}^\dagger \hat{D}) d\mu(\mathcal{H}) \quad . \quad (2.21)$$

Das Problem, das Volumenelement (bzw. das Haar-Maß) für den Raum \mathcal{C} der physikalischen Felder zu erhalten, hat sich nun auf die Auswertung der Determinante des 2D-Operators $\hat{D}^\dagger \hat{D}$ reduziert.

2.3 Wess–Zumino–Witten–Theorie

Ziel dieses Abschnittes ist, die Determinante in (2.21) durch die Matrizen H auszu-drücken. Sei $\exp(\Gamma) := \det(\hat{D}^\dagger \hat{D})$. Durch Differentiation des Funktional Γ nach A^a bzw. A^{a*} kann Γ als Funktional von H bestimmt werden [45].

2.3.1 Funktionale Differentialgleichungen für die Wirkung

Es gilt $\Gamma = \ln(\det(\hat{D}^\dagger \hat{D})) = \text{Sp}(\ln(\hat{D}^\dagger \hat{D}))$. Die Dächer verweisen auf die adjungierte Darstellung. Mit $\hat{D} = \hat{\partial} + \hat{A}$ und $\hat{A} = -iA^a \hat{T}^a$ erhält man

$$\delta_{A^a} \Gamma = \text{Sp}(\hat{D}^{-1} \delta_{A^a} \hat{D}) = -i \text{Sp}(\hat{D}^{-1} \hat{T}^a) \quad . \quad (2.22)$$

Es gilt nun \hat{D}^{-1} explizit aufzuschreiben. Mittels $\hat{D}(\vec{r}) \hat{D}^{-1}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ folgt

$$\hat{D}^{-1}(\vec{r}, \vec{r}') = \hat{M}(\vec{r}) \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \hat{M}^{-1}(\vec{r}') \quad (2.23)$$

mit $\hat{G}^{ab}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{ab} G(\vec{r}, \vec{r}') = (\pi(\bar{z} - \bar{z}'))^{-1}$ sowie $z = r_1 - ir_2$ bzw. $\bar{z} = r_1 + ir_2$. Die adjungierten Formen der Matrizen M und M^{-1} ergeben sich zu

$$\hat{M}^{ab} = 2 \text{Sp}(T^a M T^b M^{-1}) \quad , \quad \hat{M}^{-1ab} = 2 \text{Sp}(T^a M^{-1} T^b M) \quad (2.24)$$

und erfüllen die Beziehung $\hat{A} \hat{M} = -\partial \hat{M}$.

In (2.22) bedeutet $\hat{D}^{-1} \equiv \left[\hat{D}^{-1}(\vec{r}, \vec{r}') \right]_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}}$. Für diesen Limes ist die Green'sche Funktion \hat{G} aber singulär und muß daher regularisiert werden. Die Regularisierung muß sowohl eichinvariant als auch holomorph invariant sein. Bei einer Regularisierung via „point-splitting“ [22] werden diese Invarianzen respektiert. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein, sondern geben nur das Ergebnis für die regularisierte Green'sche Funktion \hat{G}_{reg} für $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$ an:

$$\hat{G}_{\text{reg}}(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} = -\frac{1}{\pi} \left((\bar{\partial} \hat{H}) \hat{H}^{-1} \right) (\vec{r}) \quad . \quad (2.25)$$

Ersetzt man in (2.23) \hat{G} durch \hat{G}_{reg} , dann ergibt sich

$$\hat{D}^{-1}(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} = -\frac{1}{\pi} \left(\hat{A}^\dagger - (\bar{\partial} \hat{M}) \hat{M}^{-1} \right) (\vec{r}) \quad . \quad (2.26)$$

Die adjungierte Matrix \hat{D}^{-1} läßt sich mittels der Generatoren $(\hat{T}^a)^{bc} = -if^{abc}$ parametrisieren: $(\hat{A}^\dagger)^{bc} = (iA^{a*} \hat{T}^a)^{bc} = -2if^{abc} \text{Sp} (A^\dagger T^a)$ und mit (2.24) ist $(\bar{\partial} \hat{M}^{bd}) \hat{M}^{-1dc} = 4 \text{Sp} (M^{-1} \{ T^b \bar{\partial} M - (\bar{\partial} M) M^{-1} T^b M \} T^d) \text{Sp} (T^d M^{-1} T^c M) = 2 \text{Sp} (\{ \}^b M^{-1} T^c) = -2if^{abc} \text{Sp} ((\bar{\partial} M) M^{-1})$. Damit folgt aus (2.22) die fundamentale Darstellung

$$\delta_{A^a} \Gamma = \frac{2iN}{\pi} \text{Sp} ((A^\dagger - \bar{\partial} M M^{-1}) T^a) \quad . \quad (2.27)$$

Entsprechend ist

$$\delta_{A^{a*}} \Gamma = -\frac{2iN}{\pi} \text{Sp} ((A - M^{\dagger-1} \partial M^\dagger) T^a) \quad . \quad (2.28)$$

Diese Differentialgleichungen werden gelöst durch $\Gamma = 2N \mathcal{S}(H) + \ln(\sigma^\eta)$, wobei $\mathcal{S}(H)$ die WZW–Wirkung ist. $\ln(\sigma^\eta)$ ist eine Konstante bezüglich A^a und A^{a*} . Sie enthält alles, was bei $A \rightarrow 0$ übrig bleibt. Auf die explizite Form von σ wird hier nicht weiter eingegangen.

2.3.2 Hermitesche Wess–Zumino–Witten–Wirkung

Die WZW–Wirkung für das hermitesche Matrixfeld H hat die Gestalt [46, 22]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(H) = & -\frac{1}{2\pi} \int d^2 r \text{Sp} (H^{-1} (\partial H) H^{-1} (\bar{\partial} H)) \\ & + \frac{i}{12\pi} \int d^3 r \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Sp} (H^{-1} (\partial_\alpha H) H^{-1} (\partial_\beta H) H^{-1} (\partial_\gamma H)) \quad . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Den ersten Term bezeichnen wir im folgenden mit \mathcal{S}_1 , den zweiten mit \mathcal{S}_2 . In \mathcal{S}_2 erhielt der Vektor \vec{r} eine weitere Komponente. Diese Ausdehnung auf das Volumen V darf keinen Einfluß auf physikalische Resultate haben und braucht daher auch nicht spezifiziert werden. \mathcal{S}_2 kann mit $X_k := H^{-1} \partial_k H$ ($k = 1, 2, 3$) auch folgendermaßen geschrieben werden: $\mathcal{S}_2 = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r \text{Sp} ([X_1, X_2] X_3)$.

Um nachzuprüfen, daß (2.29) die Differentialgleichungen (2.27) und (2.28) löst, differenzieren wir $\mathcal{S}(H)$ nach A^a bzw. A^{a*} . Dies bereitet für \mathcal{S}_1 keine weiteren Probleme:

$$\delta^a \mathcal{S}_1 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2 r \text{Sp} ((A^\dagger + F) \delta^a A + (A + F^\dagger) \delta^a F) \quad , \quad (2.30)$$

wobei $\delta^a := \delta_{A^a}$ sei. Außerdem haben wir analog zu $A := -(\partial M) M^{-1}$ bzw. $A^\dagger := -M^{\dagger-1} (\bar{\partial} M^\dagger)$ die Bezeichnungen $F := -(\bar{\partial} M) M^{-1}$ bzw. $F^\dagger := -M^{\dagger-1} (\partial M^\dagger)$ eingeführt.

Aufgrund der Jacobi-Identität $[[X_1, X_2], X_3] + \text{zyklisch} = 0$ und $[X_1, X_2] = \partial_2 X_1 - \partial_1 X_2$ ergibt die Anwendung von δ^a auf \mathcal{S}_2

$$\begin{aligned}\delta^a \mathcal{S}_2 &= \frac{i}{4\pi} \int_V d^3 r \operatorname{Sp} \left([X_1, X_2] \delta^a X_3 + \text{zyklisch} \right) \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_V d^3 r \operatorname{Sp} \left([X_1, X_2] \partial_3 \varphi^a + \text{zyklisch} \right) \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_V d^3 r \operatorname{Sp} \left(\partial_3 \varphi^a [X_1, X_2] + \text{zyklisch} \right)\end{aligned}\quad (2.31)$$

mit $\varphi^a := H^{-1} \delta^a H$. Nun ist der Gauß'sche Integralsatz anwendbar, welcher das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umwandelt. Die Oberfläche ∂V des Volumens V sei unendlich groß. Wir bilden sie auf eine unendlich ausgedehnte ebene Fläche ($d\vec{f} = (df_1, df_2, df_3)$) ab und erhalten so ein 2D-Integral:

$$\delta^a \mathcal{S}_2 = \frac{i}{4\pi} \int_{\partial V} d \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Sp}(\varphi^a [X_2, X_3]) \\ \operatorname{Sp}(\varphi^a [X_3, X_1]) \\ \operatorname{Sp}(\varphi^a [X_1, X_2]) \end{pmatrix} = \frac{i}{4\pi} \int d^2 r \operatorname{Sp}(\varphi^a [X_1, X_2]) \quad . \quad (2.32)$$

Unter der Voraussetzung, daß Randterme verschwinden, kann (2.32) weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\delta^a \mathcal{S}_2 &= \frac{i}{4\pi} \int d^2 r \operatorname{Sp} \left((\partial_2 H) H^{-1} \delta^a (\partial_1 H) H^{-1} - (\partial_1 H) H^{-1} \delta^a (\partial_2 H) H^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 r \operatorname{Sp} \left((\partial H) H^{-1} \delta^a (\bar{\partial} H) H^{-1} - (\bar{\partial} H) H^{-1} \delta^a (\partial H) H^{-1} \right)\end{aligned}\quad (2.33)$$

($\partial_1 = \partial + \bar{\partial}$, $\partial_2 = -i(\partial - \bar{\partial})$). $M^{\dagger-1}$ hängt nicht von A^a ab und darf folglich an δ^a vorbei geschoben werden. Außerdem verschwinden $\delta^a A^\dagger$ und $\delta^a F^\dagger$. Das Ergebnis ist

$$\delta^a \mathcal{S}_2 = \frac{1}{2\pi} \int d^2 r \operatorname{Sp} \left((F^\dagger + A) \delta^a F - (A^\dagger + F) \delta^a A \right) \quad . \quad (2.34)$$

Die Addition von (2.30) und (2.34) zeigt, daß (2.29) wirklich die Differentialgleichung (2.27) löst ($\mathcal{S} = \Gamma/2N$). Analog behandeln wir $\delta_{A^a} \mathcal{S}$ und kommen bei (2.28) an.

2.3.3 Matrixelemente zweier physikalischer Zustände

Nachdem das Haar-Maß $d\mu(\mathcal{C})$ nun vollständig durch die hermiteschen eichinvarianten Matrizen H ausgedrückt ist, bekommt das Skalarprodukt zweier eichinvarianter physikalischer Zustände die Gestalt [47]

$$\langle 1|2 \rangle = \sigma^\eta \int d\mu(\mathcal{H}) e^{2N\mathcal{S}(H)} \psi_1^*(H) \psi_2(H) \quad . \quad (2.35)$$

Mittels dieser Gleichung sind die Wellenfunktionale $\psi(H)$ normierbar.

Alle Observablen sind letztlich Matrixelemente von Operatoren und können daher in 2+1D (wie Gleichung (2.35) zeigt) als Korrelatoren eines hermiteschen WZW-Modells geschrieben werden, welches eine konforme Feldtheorie ist. Methoden aus konformer Feldtheorie ermöglichen es die H -Abhängigkeit der Wellenfunktionale zu spezifizieren.

2.4 Der funktionale Hamilton–Operator

Das Energie–Spektrum des 2+1D YM–Systems folgt aus der funktionalen stationären Schrödinger–Gleichung $\mathbf{H}\psi = E\psi$. Der Hamilton–Operator \mathbf{H} wird dadurch auf den Raum \mathcal{C} beschränkt, da er nur auf Funktionale von H angewendet wird: $\mathbf{H}\psi(H) = E\psi(H)$. Die Wellenfunktionale $\psi(H)$ sind, wie aus (2.35) hervorgeht, Korrelatoren eines WZW–Modells. Für diese konnte mit Hilfe konformer Feldtheorie gezeigt werden [47], daß nur solche Wellenfunktionale normierbar sind, welche über die Ströme

$$J^a(\vec{r}) = \frac{2N}{\pi} \text{Sp} (T^a(\partial H)H^{-1}) \quad (2.36)$$

von H abhängen. Ein anderes Argument, warum $\psi = \psi[J]$ gelten muß, bietet der Wilson–loop. Ist dieser ein Funktional von $J = J^a T^a$, dann sind es auch die normierbaren eichinvarianten Wellenfunktionale.

2.4.1 Wilson–loop

Die Bestimmungsgleichung für den Wilson–loop $W(\mathcal{C})$ ist folgende Differentialgleichung entlang einer gegebenen Kurve \mathcal{C} mit Anfangspunkt \vec{r}_0 und Endpunkt \vec{r} :

$$(\partial_s r_j) D_j V = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\partial_s r_j) \partial_j V = \partial_s V = -(\partial_s r_j) A_j V \quad , \quad j = 1, 2 \quad . \quad (2.37)$$

∂_s ist ein Einheitsvektor entlang der Kurve \mathcal{C} (s ist die Bogenlänge auf \mathcal{C}). Die Lösung $V = V(\vec{r}, \mathcal{C}, \vec{r}_0)$ auf der Kurve \mathcal{C} bezeichnet man als Wilson–Linie (V ist wie $\vec{A} = (A_1, A_2)$ eine $N \times N$ –Matrix). Zunächst läßt sich (2.37) über s integrieren: $V(\vec{r}_s, \mathcal{C}, \vec{r}_0) = V(\vec{r}_0, \mathcal{C}, \vec{r}_0) - \int_0^s ds' (\partial_{s'} \vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}_{s'}) V(\vec{r}_{s'}, \mathcal{C}, \vec{r}_0)$. Der Unterschied zwischen \vec{r}_0 und \vec{r}_s ist infinitesimal. Der gesamte Weg \mathcal{C} kann aus infinitesimalen Stücken iterativ zusammengesetzt werden. Dabei bleibt die V –Matrix immer rechts. Die Lösung läßt sich mit Hilfe des Wegentwicklungsoperators \mathcal{P} in kompakter Form aufschreiben:

$$V(\vec{r}, \mathcal{C}, \vec{r}_0) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A} \right) V(\vec{r}_0, \mathcal{C}, \vec{r}_0) \quad (2.38)$$

(vgl. Zeitentwicklung bei zeitabhängigen Hamilton–Operator).

Der Wilson–loop ist eine Zahl, welche durch Spurbildung aus (2.38) für eine geschlossene Kurve \mathcal{C} und Anfangsbedingung $V(\vec{r}_0, \mathcal{C}, \vec{r}_0) = 1$ hervorgeht:

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp} \left(\mathcal{P} \exp \left(- \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A} \right) \right) \quad . \quad (2.39)$$

Man kann anhand der Differentialgleichung (2.37) leicht zeigen [6, 42], daß der Wilson–loop bei Umeichung von \vec{A} in sich übergeht. Da $W(\mathcal{C})$ also nicht von U abhängt, läßt

sich \vec{A} durch die $SL(N, C)$ -Matrizen $M = U\rho$ ausdrücken (siehe (2.5), (2.7)) und $U \equiv 1$ setzen. Es folgt der auf die physikalischen Freiheitsgrade reduzierte Wilson-loop

$$\begin{aligned} W_{\text{phys}}(\mathcal{C}) &= \text{Sp} \left(\mathcal{P} \exp \left(- \oint_{\mathcal{C}} [dz A - d\bar{z} A^\dagger] \right) \right) \\ &= \text{Sp} \left(\mathcal{P} \exp \left(\oint_{\mathcal{C}} [dz (\partial\rho)\rho^{-1} - d\bar{z} \rho^{-1}(\bar{\partial}\rho)] \right) \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

mit $z = r_1 - ir_2$.

$W_{\text{phys}}(\mathcal{C})$ soll nun durch die hermiteschen Matrizen $H = \rho\rho$ ausgedrückt werden. Wie man aus (2.40) ablesen kann, ist die zugehörige Wilson-Linie V_{phys} Lösung der Differentialgleichungen

$$(\partial_s z) (\partial - (\partial\rho)\rho^{-1}) V_{\text{phys}} = 0 \quad , \quad (\partial_s \bar{z}) (\bar{\partial} + \rho^{-1}(\bar{\partial}\rho)) V_{\text{phys}} = 0 \quad (2.41)$$

zu der Anfangsbedingung $V_{\text{phys}}(\vec{r}_0, \mathcal{C}, \vec{r}_0) = 1$. Weiteres Umformen von (2.41) bringt die Matrizen H ins Spiel: $(\partial_s z) \partial H^{-1} \rho V_{\text{phys}} = 0$ bzw. $(\partial_s z) \partial \rho V_{\text{phys}} = (\partial_s z) (\partial H) H^{-1} \rho V_{\text{phys}}$ und $(\partial_s \bar{z}) \bar{\partial} \rho V_{\text{phys}} = 0$. Die Lösung ist analog zu (2.38)

$$\rho(\vec{r}) V_{\text{phys}}(\vec{r}, \mathcal{C}, \vec{r}_0) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\mathcal{C}} dz (\partial H) H^{-1} \right) \rho(\vec{r}_0) \quad . \quad (2.42)$$

Der Exponent besteht hier nur noch aus einem dz -Term, welcher die Ströme (2.36) enthält: $J^a = 2 \text{Sp}(T^a J)$ mit $J := \frac{N}{\pi} (\partial H) H^{-1}$. Es folgt der Wilson-loop für die physikalischen Freiheitsgrade als Funktional von J :

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp} \left(\mathcal{P} \exp \left(\oint_{\mathcal{C}} dz (\partial H) H^{-1} \right) \right) = \text{Sp} \left(\mathcal{P} \exp \left(\frac{\pi}{N} \oint_{\mathcal{C}} dz J \right) \right) \quad . \quad (2.43)$$

In [6] ist erklärt, daß man sich alle eichinvarianten Observablen der Felder A_j^a als Kombinationen aus Wilson-loops für verschiedene Wege \mathcal{C} denken kann. Das bedeutet insbesondere, daß normierbare Wellenfunktionen Funktionale von J sind, d.h. $\psi = \psi[J]$.

2.4.2 Energie-Eigenwerte

Aus (2.1) folgt mit $\Pi_j^a = \frac{1}{e^2} \dot{A}_j^a$ der klassische Hamilton-Operator $\mathbf{H} = \frac{e^2}{2} \int d^2 r \Pi_j^a \Pi_j^a + \frac{1}{2e^2} \int d^2 r B^a B^a$. Wird \mathbf{H} auf ein Wellenfunktional $\psi[J]$ angewendet, dann wird \mathbf{H} (da J nur von den hermiteschen Matrizen H abhängt) automatisch auf die physikalischen Freiheitsgrade beschränkt. \mathbf{H} darf darum per $\Pi_j^a \Rightarrow -i\delta_{A_j^a}$ quantisiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{T} + \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = -\frac{e^2}{2} \int d^2 r \delta_{A_j^a} \delta_{A_j^a} = -\frac{e^2}{2} \int d^2 r \delta^{a*} \delta^a \\ \text{und} \quad \mathbf{V} &= \frac{1}{e^2} \int d^2 r \text{Sp}(T^a B^a T^b B^b) \quad , \end{aligned} \quad (2.44)$$

wobei $\delta^a := \delta_{A^a}$, $\delta^{a*} := \delta_{A^{a*}}$ und $T^a B^a = T^a (\partial_1 A_2^a - \partial_2 A_1^a + f^{abc} A_1^b A_2^c) = 2 (\bar{D}A + DA^\dagger)$ verwendet wurde (siehe (2.2), (2.4)).

Der Hamilton–Operator wird auf $\psi[J]$ angewendet. Er sollte sich daher als eine Bildung aus J^a und funktionalen Ableitungen nach J^a erweisen. Das Potential \mathbf{V} (welches keine Differentiationen enthält) läßt sich in der Tat allein durch die Ströme J^a ausdrücken: Mit $A = -(\partial M)M^{-1}$ wird $T^a B^a = 2 ((\bar{\partial} - A^\dagger)A + (\partial + A)A^\dagger) = -2 M^{\dagger-1} [\bar{\partial}(\partial H)H^{-1}] M^\dagger$ und damit

$$\mathbf{V} = \frac{4}{e^2} \int d^2 r \operatorname{Sp} ([\bar{\partial}(\partial H)H^{-1}] [\bar{\partial}(\partial H)H^{-1}]) = \frac{2\pi^2}{e^2 N^2} \int d^2 r (\bar{\partial} J^a) (\bar{\partial} J^a) . \quad (2.45)$$

Um den kinetischen Energie–Operator \mathbf{T} durch J^a und δ_J^a auszudrücken, wird er zunächst (unter Verwendung der Kettenregel) auf $\psi[J]$ angewendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -\frac{e^2}{2} \int d^2 r \int d^2 r' (\delta_r^{a*} \delta_r^a J^b(\vec{r}')) \delta_{J^b(\vec{r}')} \\ & -\frac{e^2}{2} \int d^2 r \int d^2 r' \int d^2 r'' (\delta_r^{a*} J^b(\vec{r}')) (\delta_r^a J^c(\vec{r}'')) \delta_{J^b(\vec{r}')} \delta_{J^c(\vec{r}'')} . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Diese Terme lassen sich nun weiter umformen.

Im folgenden wird die Auswertung des ersten Termes in (2.46) vorgeführt. Er enthält die Anwendung von \mathbf{T} auf J^b :

$$\mathbf{T} J^b(\vec{r}') = -\frac{e^2}{2} \int d^2 r \delta_r^{a*} \delta_r^a J^b(\vec{r}') = -i \frac{e^2 N}{2\pi} \delta_{r'}^{a*} (\hat{M}^\dagger(\vec{r}'))^{ba} , \quad (2.47)$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus (2.36) und (2.24) folgt. Die adjungierte Matrix \hat{M}^\dagger erfüllt die Beziehung $\hat{M}^\dagger \hat{A}^\dagger = -\bar{\partial} \hat{M}^\dagger$ bzw. $(\hat{D} \hat{M})^\dagger = 0$. Hieraus erhält man $(\delta_r^{a*} \hat{M}^\dagger(\vec{r}')) \hat{D}^\dagger(\vec{r}') = -\hat{M}^\dagger(\vec{r}') \delta_r^{a*} \hat{D}^\dagger(\vec{r}') = -i \hat{M}^\dagger(\vec{r}') \hat{T}^a \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ und mit der Identität $\hat{D}^{\dagger-1}(\vec{r}, \vec{r}') \hat{D}^\dagger(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ sowie (2.22) schließlich

$$\left[\delta_r^{a*} (\hat{M}^\dagger)^{ba}(\vec{r}') \right]_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}'} = -(\hat{M}^\dagger)^{bc}(\vec{r}') f^{acd} \left[(\hat{D}^{\dagger-1})^{da}(\vec{r}, \vec{r}') \right]_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}'} = (\hat{M}^\dagger)^{bc}(\vec{r}') \delta_{r'}^{c*} \Gamma . \quad (2.48)$$

Nach Regularisierung von $\hat{D}^{\dagger-1}$ für $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ analog zu (2.25) und (2.26) kann für $\delta_{r'}^{c*} \Gamma$ die Lösung (2.28) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} J^b(\vec{r}') &= \frac{e^2 N^2}{\pi^2} 2 \operatorname{Sp} (M^{\dagger-1} T^b M^\dagger T^c)(\vec{r}') \operatorname{Sp} (M^{\dagger-1} (\partial H) H^{-1} M^\dagger T^c)(\vec{r}') \\ &= \frac{e^2 N^2}{\pi^2} \operatorname{Sp} (T^b (\partial H) H^{-1})(\vec{r}') \\ &= m J^b(\vec{r}') \quad \text{mit} \quad m := \frac{e^2 N}{2\pi} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die Ströme $J^a = 2 \operatorname{Sp}(T^a J)$ sind also Eigenfunktionen des kinetischen Energie–Operators \mathbf{T} . Der zugehörige Eigenwert m ist unendlichfach entartet.

Auch der zweite Term in (2.46) läßt sich weiter umformen. Wir zitieren hier nur das Ergebnis [22, 42]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= m \int d^2 r J^a(\vec{r}) \delta_{J^a(\vec{r})} + m \int d^2 r \int d^2 r' \Omega^{ab}(z, z') \delta_{J^a(\vec{r})} \delta_{J^b(\vec{r}')} \\ \text{mit} \quad \Omega^{ab}(z, z') &:= \frac{N \delta^{ab}}{\pi^2 (z - z')^2} - \frac{i f^{abc} J^c(\vec{r}')}{\pi (z - z')} \end{aligned} \quad (2.50)$$

und $z = r_1 - r_2$. Mit Blick auf den Potentialterm (2.45) werden nun neue Felder definiert: $I^a(\vec{r}) := \bar{\partial} J^a(\vec{r})$. Fourier-Transformation [42] überführt diese in $\tilde{I}^a(\vec{k}) = \frac{i}{2}(k_1 - ik_2) \tilde{J}^a(\vec{k})$ (k_1, k_2 sind die Komponenten von \vec{k}). Im Raum der Wellenfunktionale $\psi[\tilde{I}^a(\vec{k})]$ erhält der Hamilton-Operator die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= m \int d^2 k \tilde{I}^a(\vec{k}) \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} - \pi N m \int d^2 k k^2 \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} \delta_{\tilde{I}^a(-\vec{k})} \\ &\quad - i m \int d^2 k \int d^2 p F(\vec{k}, \vec{p}) f^{abc} \tilde{I}^c(\vec{k} + \vec{p}) \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} \delta_{\tilde{I}^b(\vec{p})} + \mathbf{V} \\ \text{mit} \quad \mathbf{V} &= \frac{1}{4\pi N m} \int d^2 k \tilde{I}^a(\vec{k}) \tilde{I}^a(-\vec{k}) \quad . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Darin ist $F(\vec{k}, \vec{p}) := \frac{(p_1 - ip_2)}{(k_1 - ik_2) + (p_1 - ip_2)}$. Ohne den nicht-linearen dritten Term wäre der Hamilton-Operator (2.51) eine quadratische Form in \tilde{I}^a und $\delta_{\tilde{I}^a}$.

Eigenfunktionen zu \mathbf{T} sind gefunden. Um das Potential \mathbf{V} mit einzubeziehen, erweist sich folgender Ansatz für die Eigenfunktionen als sinnvoll [23]: $\psi[\tilde{I}] = e^{P[\tilde{I}]} \psi_0[\tilde{I}]$, wobei ψ_0 Eigenfunktion zu \mathbf{T} ist. Mittels $\tilde{\mathbf{H}} := e^{-P} \mathbf{H} e^P$ kann nun die stationäre Schrödinger-Gleichung $\mathbf{H}\psi = E\psi$ durch $\tilde{\mathbf{H}}\psi_0 = E\psi_0$ ersetzt werden. Da P und I vertauschen, ist

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \Big|_{\delta_{\tilde{I}^a} \rightarrow e^{-P} \delta_{\tilde{I}^a} e^P} \quad . \quad (2.52)$$

Bei einer Entwicklung des Operators $e^{-P} \delta_{\tilde{I}^a} e^P$ (Baker-Hausdorff), sind nur die ersten beiden Reihenterme von Null verschieden: $e^{-P} \delta_{\tilde{I}^a} e^P = \delta_{\tilde{I}^a} + [\delta_{\tilde{I}^a}, P] = \delta_{\tilde{I}^a} + (\delta_{\tilde{I}^a} P)$. Das Funktional $P[\tilde{I}]$ muß nun so bestimmt werden, daß die Bedingung $\tilde{\mathbf{H}}1 = 0$ erfüllt ist. Die Lösung sei $P_\bullet[\tilde{I}]$. Der Effekt des Potentials \mathbf{V} ist jetzt vollständig in $P_\bullet[\tilde{I}]$ enthalten und alle nicht-differenzierenden Terme in $\tilde{\mathbf{H}}$ sind beseitigt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}} &= m \int d^2 k \left\{ \tilde{I}^a(\vec{k}) - 2\pi N k^2 \left(\delta_{\tilde{I}^a(-\vec{k})} P_\bullet[\tilde{I}] \right) \right. \\ &\quad \left. - 2i \int d^2 p F(\vec{k}, \vec{p}) f^{abc} \tilde{I}^c(\vec{k} + \vec{p}) \left(\delta_{\tilde{I}^b(\vec{p})} P_\bullet[\tilde{I}] \right) \right\} \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} \\ &\quad + m \int d^2 k \int d^2 p \left\{ -\pi N k^2 \delta(\vec{k} + \vec{p}) \delta^{ab} - i F(\vec{k}, \vec{p}) f^{abc} \tilde{I}^c(\vec{k} + \vec{p}) \right\} \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} \delta_{\tilde{I}^b(\vec{p})} \quad . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Um die Schrödinger-Gleichung zu lösen, muß $P_\bullet[\tilde{I}]$ bekannt sein. Wir wissen aber, daß wegen des Farbeinschlusses in der $T=0$ Theorie nur farblose Eigenzustände, die sogenannten *glue balls*, existieren können. Mit der Frage, wie aus $\tilde{\mathbf{H}}$ dennoch eine Energielücke im Spektrum eines einzelnen (farbigen) Gluons folgt, beschäftigen wir uns am Ende des dritten Kapitels. Dort geben wir Argumente, weshalb m die gesuchte Energielücke sein sollte.

Kapitel 3

Magnetische Abschirmung

Die magnetische Masse ist durch den statischen Limes der transversalen Selbstenergie bei *supersoft* äußerem Impuls gegeben. Hier versagt Störungstheorie, denn der räumliche Anteil (alle *loop*-Integrationen auf $P_0 = 0$ reduziert) hat in jeder Störungsordnung die gleiche Größenordnung, nämlich die der magnetischen Masse im Quadrat ($m_{\text{mag}}^2 \sim g^4 T^2$). Dieser räumliche Anteil ist die Selbstenergie der 3D Euklidischen YM-Theorie bei $T = 0$, welche von KKN [22] behandelt wird und im vorangehenden Kapitel vorgestellt wurde.

Schon vor den KKN-Arbeiten wurde allgemein angenommen, daß die magnetische Masse aus einer 3D YM-Theorie nicht-störungstheoretisch folgt [19]. Diese Annahme setzt aber voraus, daß alle nicht zum räumlichen Anteil gehörenden g^4 -Terme der transversalen Selbstenergie im statischen Limes verschwinden. Dies wurde bisher nicht überprüft.

Mit diesem Kapitel beginnt nun die eigentliche Arbeit. Die genannte Vermutung, daß die Energielücke im Spektrum eines einzelnen Gluons in der 3D YM-Theorie via $e^2 = g^2 T$ mit der magnetischen Masse in thermischer Feldtheorie übereinstimmt, werden wir quantitativ analysieren. Nach einigen Vorbereitungen untersuchen wir im zweiten Abschnitt die 1-*loop* Ordnung und in den Abschnitten 3 bis 5 die 2-*loop* Ordnung der transversalen Selbstenergie im statischen Limes. Im sechsten Abschnitt diskutieren wir Auswirkungen der gewonnenen Erkenntnisse auf die Bestimmung der magnetischen Masse.

In der Publikation [24] haben wir vermutet, daß die transversale Selbstenergie im statischen Limes identisch ist mit jener einer regularisierten 3D YM-Theorie. Vor kurzem gewonnene neue Erkenntnisse stellen diese Sicht nun in Frage: Wie Abschnitt 4 zeigt, existieren in 2-*loop* Ordnung endliche Terme $\sim g^4 T^2$, welche nicht zum 3D-Anteil gehören. Diese Terme können wir teilweise explizit angeben. Es ist zur Zeit nicht zu sehen, ob sich diese mit weiteren (nicht zum 3D-Anteil gehörenden) Termen wegheben werden.

3.1 Besonderheiten zum statischen Limes

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir den statischen Limes der transversalen Dispersionskurve (Abbildung 1.1) bis einschließlich der Ordnung $g^4 T^2$. Störungstheore-

tisch bedeutet das, die folgende Gleichung zu lösen :

$$-q^2 = {}^1\Pi_t(q) + {}^2\Pi_t(q) + {}^{>2}\Pi_t^{\text{alle Imp. ss}}(q) \quad . \quad (3.1)$$

Sie folgt aus Nullsetzen des Nenners des Gluon-Propagators (1.43) und $Q_0 = 0$, wobei $\Pi_t(q) := \Pi_t(Q_0=0, q)$ sei (Π_t ist rotationsinvariant). Der linke obere Index gibt die *loop*-Ordnung an. Diagramme mit mehr als zwei *loops* müssen aufgrund des Linde-Mechanismus berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 1.6), für den Fall, daß alle *loop*-Impulse *supersoft* sind. Der letzte Term in (3.1) ist also der > 2 -*loop* Anteil der 3D Euklidischen Theorie. Die fehlenden 1- und 2-*loop* Anteile sind aus den ersten beiden Termen in (3.1) zu präparieren. Außerdem sollten in ${}^1\Pi_t$ und ${}^2\Pi_t$ Regulatoren der 3D-Selbstenergie verborgen sein. In der Publikation [24] gingen wir davon aus (insbesondere wegen Abschnitt 3.3), daß es dann auf der transversalen Massenschale keine weiteren Beiträge gibt, so daß $-q^2 = 0_{g^2} + 0_{g^3} + 0_{g^4} + \Pi_t^{3\text{D, reg.}}$ ist. Jede der Nullen sollte für einen eichfixierungsunabhängigen Anteil von $\Pi_t = \frac{1}{2}\text{Sp}(\mathbf{A}\Pi)$ stehen, wobei der Index die g -Ordnung angibt.

Aufgrund der Erkenntnisse aus dem vierten und fünften Abschnitt dieses Kapitels, ist die Null in $\mathcal{O}(g^4)$ nun nicht mehr sicher. Beiträge der 2-*loop* Diagramme, bei denen beide *loop*-Impulse auf den *soft*-Bereich beschränkt werden, sind $\sim g^4 T^2$. Sie werden wahrscheinlich nicht verschwinden. Der generische (*hard-hard*) Beitrag der 2-*loop* Diagramme trägt dagegen nicht bei. In den nächsten Abschnitten wird sich zeigen, daß

$$-q^2 = 0_{g^2} + 0_{g^3} + 0_{g^4}^{hh} + 0_{g^4}^{hs} + {}^2\Pi_t^{ss} + \Pi_t^{3\text{D, reg.}} \quad (3.2)$$

gilt. Die vierte Null steht für Beiträge, bei denen die *loop*-Impulse unterschiedliche Größenordnung besitzen. Der letzte Term in (3.2) ist die regularisierte Selbstenergie einer 3D-Euklidischen YM-Theorie. Auch die 3D-Theorie mit Propagator $(1 - \frac{p \circ p}{p^2}) / (p^2 + \Pi_t^{3\text{D, reg.}}) + \alpha \frac{p \circ p}{p^4}$ hat auf der Massenschale eine eichfixierungsunabhängige Selbstenergie.

Im folgenden ist der äußere Impuls der transversalen Selbstenergie, welcher durchgehend mit Q bezeichnet wird, *supersoft*. Ist vom statischen Limes die Rede, dann bedeutet das neben $Q_0 = 0$ immer auch $q \sim g^2 T$.

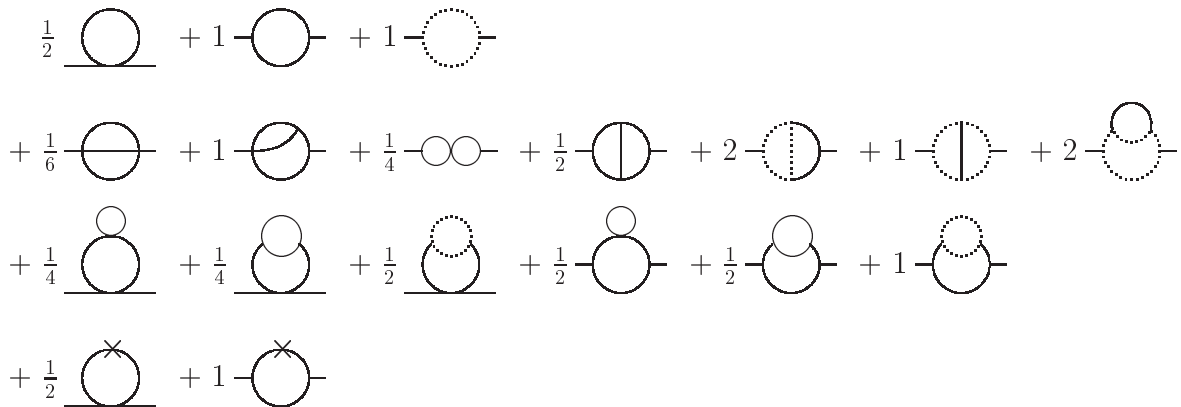


Abbildung 3.1: Die Gluon-Selbstenergie-Diagramme in 1- und 2-*loop* Ordnung einschließlich ihrer Symmetriefaktoren. Gluon-Propagatoren sind mit durchgezogenen Linien dargestellt, Geist-Propagatoren mit gepunkteten Linien. Die Kreuze in den Diagrammen der untersten Zeile verweisen auf Masseneinsetzungen \mathbf{Y} .

Die Gluon–Selbstenergie–Diagramme in 1– und 2–*loop* Ordnung sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Mit Blick auf den statischen Limes darf (statt $\mathbf{Y}^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu}$, [30, 28], $\Pi^{\mu\nu}$ ist die exakte Gluon–Selbstenergie), die auf $P_0 = 0$ reduzierte Form

$$\mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) = \delta_{P_0,0} \left(\tau^2(p) \mathbf{A}^{\mu\nu}(P) + \sigma^2 \mathbf{B}^{\mu\nu}(P) \right) \quad (3.3)$$

gewählt werden. Die Konstante σ^2 bezeichnet hier die führende Ordnung der longitudinalen Selbstenergie im statischen Limes (dort ist sie impulsunabhängig), d.h. $\sigma^2 = 3m_0^2 = \frac{1}{3}g^2NT^2$ (1.46). Der transversale IR–Regulator kann zunächst noch als Spielzeugparameter der Größenordnung $\tau^2(p) \sim m_{\text{mag}}^2 \sim g^4T^2$ (diese Größenordnung muß insbesondere für *supersoft* p gelten) behandelt werden.

Die Beschränkung der IR–Regularisierung auf die $P_0 = 0$ –Mode erwies sich insbesondere in der Thermodynamik bei statischen Größen, wie der Freien Energie, als sinnvoll [14, 48]. Da P_0 die diskreten Matsubara–Frequenzen $\omega_n = 2\pi nT$ annimmt ($P_0 = i\omega_n$), ist ein IR–Regulator für $P_0 \neq 0$ nicht notwendig. Bei dynamischen Größen, wie der Selbstenergie, ist der IR–Regulator (3.3) nur im statischen Limes $Q_0 \rightarrow \omega = 0$ erlaubt. In diesem Limes ist auch keine Korrektur der Vertizes mit sogenannten *hard thermal loops* erforderlich [9].

Mit (3.3) bekommt der volle Gluon–Propagator (1.32) die Gestalt

$$G^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{P^2 - \delta_{P_0,0} \tau^2(p)} \mathbf{A}^{\mu\nu}(P) + \frac{1}{P^2 - \delta_{P_0,0} \sigma^2} \mathbf{B}^{\mu\nu}(P) + \frac{\alpha}{P^2} \mathbf{D}^{\mu\nu}(P) \quad . \quad (3.4)$$

Zunächst werden wir noch p –Abhängigkeit des Regulators τ^2 zulassen. Inwiefern $\tau^2(p)$ zu einer konstanten Größe werden kann, wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels diskutiert.

In diesem und dem nächsten Kapitel werden wir häufiger die Aufteilung

$$G^{\mu\nu}(P) = G_0^{\mu\nu}(P) + G_-^{\mu\nu}(P) \quad \text{mit} \quad G_-^{\mu\nu}(P) = G^{\mu\nu}(P) - G_0^{\mu\nu}(P) \quad (3.5)$$

vornehmen. Hierin ist $G_0^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{P^2} (\mathbf{g}^{\mu\nu} + (\alpha - 1) \mathbf{D}^{\mu\nu}(P))$ der nackte Gluon–Propagator (1.28). Wie aus (3.4), (3.5) hervorgeht, enthält $G_-^{\mu\nu}(P)$ keinen α –Term. Außerdem verschwindet $G_-^{\mu\nu}(P)$ aufgrund der minimalen IR–Regularisierung (3.3) für $P_0 \neq 0$, d.h.

$$G_-^{\mu\nu}(P) = \delta_{P_0,0} \left\{ \left(-\Delta_\tau(p) + \Delta_0(p) \right) \mathbf{A}^{\mu\nu}(\vec{p}) + \left(-\Delta_\sigma(p) + \Delta_0(p) \right) U^\mu U^\nu \right\} \quad . \quad (3.6)$$

Es sei bemerkt, daß $\mathbf{A}(P) = \mathbf{A}(P_0 = 0, \vec{p}) =: \mathbf{A}(\vec{p})$ und $\mathbf{B}(P_0 = 0, \vec{p}) = U \circ U$ mit $U = (1, \vec{0})$ (siehe Anhang C). Δ_τ und Δ_σ seien dreidimensionale Propagatoren, welche wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau &:= \frac{1}{p^2 + \tau^2} \quad , \quad \Delta_\sigma := \frac{1}{p^2 + \sigma^2} \quad , \quad \Delta_0 := \frac{1}{p^2} \quad , \\ \Delta_\tau^- &:= \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2 + \tau^2} \quad , \quad \Delta_\sigma^- := \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2 + \sigma^2} \quad , \quad \Delta_0^- := \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 1-loop transversale Selbstenergie

Die 1-loop Diagramme für die Selbstenergie $\Pi^{\mu\nu}(Q)$ sind in der ersten Zeile in Abbildung 3.1 zu finden. Nach Anwendung der Graphenregeln, welche im Anhang B zusammengestellt sind (sowie Ausführung der Farbsummationen), erhalten wir für die 1-loop Selbstenergie folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 {}^1\Pi^{\mu\nu}(Q) = & g^2 N \sum_P \left\{ G^{\mu\nu}(P) - \text{Sp}(G(P)) g^{\mu\nu} \right. \\
 & - 2 \left((P - 2Q)G(P)G(P - Q) \right)^\mu (2P - Q)^\nu \\
 & + \left((P - 2Q)G(P) \right)^\mu \left((P + Q)G(P - Q) \right)^\nu \\
 & + \frac{1}{2} \text{Sp}(G(P)G(P - Q)) (2P - Q)^\mu (2P - Q)^\nu \\
 & + \left[(P + Q)G(P - Q)(P + Q) \right] G^{\mu\nu}(P) \\
 & \left. - \frac{1}{P^2(P - Q)^2} P^\mu (P + Q)^\nu \right\}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Der Übersicht halber sind hier Vektor-Matrix- sowie Matrix-Matrix-Produkte ohne 4er-Indizes angegeben.

Mit der Unterteilung (3.5) des Gluon-Propagators läßt sich auch die Selbstenergie aufteilen in einen nur aus nackten Gluon-Linien bestehenden Teil $\Pi_{(0)}^{\mu\nu}$ und der Differenz $\Pi_{(-)}^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} - \Pi_{(0)}^{\mu\nu}$. Im nächsten Unterabschnitt untersuchen wir zunächst ${}^1\Pi_{t(0)}(Q) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{A}(Q)\Pi_{(0)}(Q))$.

3.2.1 Diagramme mit nackten Linien

Ersetzen wir in (3.8) den vollen Gluon-Propagator G durch den nackten Propagator G_0 , dann erhält die transversale Selbstenergie in 1-loop Ordnung nach einigen Umformungen die Gestalt

$$\begin{aligned}
 {}^1\Pi_{t(0)}(Q) = & g^2 N \sum_P \left\{ -2 \frac{1}{P^2} - 2 \frac{p^2}{P^2(P - Q)^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) + 2 \frac{Q^2}{P^2(P - Q)^2} \right. \\
 & + (\alpha - 1) \left(-\frac{Q^2}{P^4} - \frac{Q^2 p^2}{P^4(P - Q)^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) + \frac{Q^4}{P^4(P - Q)^2} \right) \\
 & \left. - \frac{1}{4} (\alpha - 1)^2 \frac{Q^4 p^2}{P^4(P - Q)^4} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Dies ist ein wohlbekannter Ausdruck. Bei Untersuchungen zur nächst-führenden Ordnung auf *soft* Skala, in $\mathcal{O}(g^3)$, spielen jene Terme mit Q^2 im Zähler keine Rolle (siehe [11], §4). Da

wir uns hier aber für $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ interessieren, darf keiner der Terme in (3.9) vernachlässigt werden, wie eine Größenordnungsbetrachtung (siehe Kap. 1.6) für *supersoft* Q und einem IR-Regulator $\sim \tau$ zeigt. Zur führenden ($\sim g^2 T^2$) Ordnung tragen dagegen nur die ersten beiden Terme von (3.9) bei. Wir bezeichnen sie mit ${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}$:

$${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}(Q) := g^2 N \sum_P \left\{ -2 \frac{1}{P^2} - 2 \frac{p^2}{P^2(P-Q)^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\} . \quad (3.10)$$

Aufgrund der Q -Abhängigkeit enthält (3.10) neben dem g^2 -Beitrag auch Beiträge höherer Ordnung. (3.10) ist also nicht identisch mit dem bekannten g^2 -Term (siehe z.B. [11], Anhang B)

$$\Pi_t^{g^2}(Q) = \frac{1}{6} g^2 N T^2 \left\{ \frac{Q_0^2}{q^2} - \left(\frac{Q_0^2}{q^2} - 1 \right) \ln \left(\frac{Q_0 + q}{Q_0 - q} \right) \right\} . \quad (3.11)$$

$\Pi_t^{g^2}(Q)$ ist α -unabhängig und verschwindet im statischen Limes, d.h. für $Q_0 \rightarrow \omega = 0$:

$$\Pi_t^{g^2}(q) = 0 . \quad (3.12)$$

Dies ist die erste Null in Gleichung (3.2).

Mit Blick auf höhere Ordnungen werten wir die Frequenz-Summe in (3.10) aus (vgl. Anhang A). Im statischen Limes ist

$${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}(q) = g^2 N \int_p^3 n(p) \left\{ 2 \frac{1}{p} + 4 \frac{p}{p^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\} . \quad (3.13)$$

Darin ist $\int_p^3 := \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p$. Nach Ausführung der Winkelintegration bekommt (3.13) die Gestalt

$${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}(q) = \frac{g^2 N}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \, n(p) \, p \left\{ 2 + \left(\frac{2p}{q} - \frac{q}{2p} \right) \ln \left(\frac{|2p - q|}{2p + q} \right) \right\} . \quad (3.14)$$

Für $p \gg q$ kann die geschweifte Klammer in (3.14) entwickelt werden: $\{ \} = \mathcal{O}(q^2/p^2)$. Für $p \sim q \ll T$ kann dagegen die Bosefunktion entwickelt werden: $n(p) = T/p + \mathcal{O}(1)$. Insgesamt ist also ${}^1\Pi_t^{\text{ohne}} \sim g^2 T \int_0^\infty dp \{ \} + \mathcal{O}(g^2 q^2)$. In $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ kann daher die Bosefunktion $n(p)$ durch T/p ersetzt werden. Das Integral läßt sich nun auswerten (Anhang A) mit dem Ergebnis

$${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}(q) = \frac{q}{16} g^2 N T . \quad (3.15)$$

Zu beachten ist, daß dieses Ergebnis nur für *supersoft* q gilt, weil ansonsten $n(p)$ nicht durch T/p ersetzt werden darf.

Um mit dem entsprechenden Ausdruck in der 3D-Theorie, welcher durch (3.10) mit $P_0 = 0$ gegeben ist, vergleichen zu können, schreiben wir (3.13) in folgender Form auf:

$${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}(q) = g^2 N T \int_p^3 \left\{ \frac{4}{3} \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\} . \quad (3.16)$$

Das Integral ist endlich. Auswertung liefert (3.15). Das Integral in (3.16) ist also identisch mit jenem in (3.13). Jedoch unterscheidet es sich von dem 3D-Anteil in (3.10): Setzen

wir dort $Q_0 = P_0 = 0$ und $\sum_P = T \int_p^3$, dann würde das Integral divergieren. Der Ausweg bei diesem Identifizierungsproblem liegt darin, zu (3.16) eine Null zu addieren:

$$0 = \int_p^3 \frac{2M^2}{3p^2} \partial_p \frac{p}{p^2 + M^2} = \int_p^3 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{p^2 + M^2} + \frac{4}{3} \frac{p^2}{(p^2 + M^2)^2} \right) . \quad (3.17)$$

Diese Identität behält für alle M ihre Gültigkeit. Fassen wir M als Regulatormasse auf, d.h. $M \gg q \sim g^2 T$, dann bekommen wir ${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}$ in drei Dimensionen einschließlich eines Regulators:

$${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}(q) = g^2 NT \int_p^3 \left\{ 2 \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - 2 \frac{1}{p^2 + M^2} + \frac{4}{3} \frac{p^2}{(p^2 + M^2)^2} \right\} . \quad (3.18)$$

Hier sieht man jetzt, daß (3.18) (bis auf den Regulator) der $P_0 = 0$ -Anteil von (3.10) ist.

In (3.9) können die nicht in ${}^1\Pi_t^{\text{ohne}}$ enthaltenen Terme auf ihren $P_0 = 0$ -Anteil reduziert werden, da für $P_0 \neq 0$ $P \sim T$ ist und Terme mit Q^2 im Zähler daher Beiträge $\sim g^6 T^2$ geben. Für $Q_0 = 0$ kann also (3.9) bis einschließlich $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ in der Form

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(0)}(q) = g^2 NT \int_p^3 & \left\{ 2 \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - 2 \frac{q^2}{p^2 (\vec{p} - \vec{q})^2} \right. \\ & + (\alpha - 1) \left(\frac{q^2}{p^4} - \frac{q^2}{p^2 (\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - \frac{q^4}{p^4 (\vec{p} - \vec{q})^2} \right) \\ & - \frac{1}{4} (\alpha - 1)^2 \frac{q^4}{p^2 (\vec{p} - \vec{q})^4} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \\ & \left. - 2 \frac{1}{p^2 + M^2} + \frac{4}{3} \frac{p^2}{(p^2 + M^2)^2} \right\} . \end{aligned} \quad (3.19)$$

angegeben werden. Dies ist ${}^1\Pi_{t(0)}$ in 3D zuzüglich Regulatortermen.

3.2.2 Die nächst-führende Ordnung

Am Anfang dieses Abschnittes hatten wir die Selbstenergie (3.8) in einen nur nackte Gluon-Linien enthaltenen Anteil $\Pi_{(0)}^{\mu\nu}$ und dem Anteil $\Pi_{(-)}^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} - \Pi_{(0)}^{\mu\nu}$ unterteilt. Den transversalen Sektor des letzteren untersuchen wir in diesem Unterabschnitt. Aufgrund der IR-Regularisierung (3.3) (nur für $P_0 = 0$ also) reduziert sich die thermische Summe in ${}^1\Pi_{t(-)}$ auf ihren $P_0 = 0$ -Anteil. Aus (3.8) und $\Pi_t = \frac{1}{2} \text{Sp}(\Pi \mathbf{A})$ folgt

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(-)}(q) = g^2 NT \int_p^3 & \left\{ - (-\Delta_\sigma + \Delta_0) + (\Delta_\sigma \Delta_\sigma^- - \Delta_0 \Delta_0^-) [P \mathbf{A}(Q) P] \right. \\ & + (-\Delta_\tau + \Delta_0) \left(\frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{A}(P) \mathbf{A}(Q)) - 2 \right) \\ & + (\Delta_\tau \Delta_\tau^- - \Delta_0 \Delta_0^-) \mathcal{W} \\ & \left. + \frac{1}{2} \alpha (-\Delta_\tau + \Delta_0) \Delta_0^- \Delta_0^- (p^2 - q^2)^2 \text{Sp}(\mathbf{A}(P) \mathbf{A}(Q)) \right\} , \end{aligned} \quad (3.20)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \equiv & 4 \left[Q \mathbf{A}(P) \mathbf{A}(P-Q) \mathbf{A}(Q) P \right] - 2 \left[Q \mathbf{A}(P) \mathbf{A}(Q) \mathbf{A}(P-Q) P \right] \\ & + \text{Sp} \left(\mathbf{A}(P) \mathbf{A}(P-Q) \right) \left[P \mathbf{A}(Q) P \right] + 2 \text{Sp} \left(\mathbf{A}(P) \mathbf{A}(Q) \right) \left[P \mathbf{A}(P-Q) P \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hier wurde bereits $\mathbf{A}(P)P = 0 = \mathbf{B}(P)P$ berücksichtigt. Für $P_0 = Q_0 = 0$ gilt außerdem $\mathbf{A}(P)\mathbf{B}(Q) = 0$ sowie $P\mathbf{B}(Q) = 0$ (siehe Anhang C). Aufgrund dessen gibt es in (3.20) nur zwei Terme, welche Δ_σ enthalten. Produkte mit den Matrizen \mathbf{A} sind im Anhang C ausgewertet. Obwohl mit Vierer-Impulsen angegeben, erweisen sie sich als rein räumliche Gebilde (d.h. ohne P_0 -, Q_0 -Abhängigkeit). Damit läßt sich (3.20) umschreiben zu

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(-)}(q) = & g^2 NT \int_p^3 \left\{ (\Delta_\sigma - \Delta_0) - p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) (\Delta_\sigma \Delta_\sigma^- - \Delta_0 \Delta_0^-) + \frac{4}{3} (\Delta_\tau - \Delta_0) \right. \\ & - \frac{1}{4} \left(6p^2 + 2p^4 \Delta_0^- + 12q^2 + q^4 \Delta_0^- \right) \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) (\Delta_\tau \Delta_\tau^- - \Delta_0 \Delta_0^-) \\ & \left. + \alpha \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - 1 \right) (p^2 - q^2)^2 \Delta_0 \Delta_0^- (\Delta_\tau - \Delta_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

${}^1\Pi_{t(-)}$ ist konvergent, hängt aber vom Eichfixierungsparameter α ab. Jedoch besitzt der α -Term aufgrund des letzten Faktors, der den Impuls p im *supersoft*-Bereich festhält die Größenordnung $g^2 T \int_p^3 (\Delta_\tau - \Delta_0) \sim g^2 T \tau \sim g^4 T^2$. Der g^3 -Beitrag zu Π_t für $Q_0 = 0$, welcher vollständig in (3.22) enthalten ist, ist also α -unabhängig. Um den g^3 -Beitrag zu präparieren, streiche man in (3.22) alle $(\Delta_\tau - \Delta_0)$ -Differenzen, da diese die Größenordnung $g^4 T^2$ besitzen. Nur die ersten beiden Terme bleiben übrig. Hier können wir wegen $\sigma \gg q$ den Propagator Δ_σ^- durch Δ_σ ersetzen und die Winkelintegration ausführen. Damit ist

$$\Pi_t^{g^3}(q) = g^2 NT \int_p^3 \left\{ (\Delta_\sigma - \Delta_0) - \frac{2}{3} p^2 (\Delta_\sigma \Delta_\sigma - \Delta_0 \Delta_0) \right\} = 0, \quad (3.23)$$

wobei die Null aus (3.17) folgt. Das Verschwinden der transversalen Selbstenergie im statischen Limes in $\mathcal{O}(g^3 T^2)$ ist bekannt [39]. (3.23) ist die zweite Null in Gleichung (3.2).

3.2.3 Das Resultat in 1-loop Ordnung

In der Summe von (3.22) und (3.19) sind alle g^4 -Terme der transversalen Selbstenergie in 1-loop Ordnung enthalten. Es existieren keine Beiträge $\sim g^2$ und $\sim g^3$. Auch in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ kann Δ_σ^- durch Δ_σ ersetzt werden, wie die Entwicklung von Δ_σ^- für $\sigma \gg q$ zeigt. Das Resultat in 1-loop Ordnung ist

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_t(q) = & g^2 NT \int_p^3 \left\{ \frac{4}{3} \Delta_\tau + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \Delta_0^- \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) (3p^2 + p^4 \Delta_0^-) \Delta_\tau \Delta_\tau^- \\ & - 3 q^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \Delta_\tau \Delta_\tau^- - \frac{1}{4} q^4 \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \Delta_0^- \Delta_\tau \Delta_\tau^- \\ & \left. + \Re + (\alpha\text{-Terme}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Darin ist \mathfrak{R} der UV-Regulator,

$$\mathfrak{R} = \Delta_\sigma - \frac{2}{3}p^2\Delta_\sigma^2 - 2\Delta_M + \frac{4}{3}p^2\Delta_M^2 = -\Delta_\sigma + \frac{2}{3}p^2\Delta_\sigma^2 \quad , \quad (3.25)$$

wobei wir rechts in (3.25) $M = \sigma$ gesetzt haben. Wie anhand von (3.17) deutlich wird, hängt ${}^1\Pi_t$ nicht von σ ab, obwohl σ im Regulator \mathfrak{R} enthalten ist. Für $p \rightarrow \infty$ verhält sich der Integrand in (3.24) wie $\frac{1}{3}\Delta_0$, woran wir sehen, daß der Regulator (3.25) wirklich für Konvergenz sorgt.

Die 1-loop transversale Selbstenergie (3.24) muß in $\mathcal{O}(g^4T^2)$ nicht α -unabhängig sein, da zu dieser Ordnung der gesamte Linde-See beiträgt (siehe Abschnitt 1.6). Insgesamt muß aber auf der transversalen Dispersionskurve, insbesondere im statischen Limes, Eichfixierungsunabhängigkeit gewährleistet sein. Die magnetische Masse ist eine physikalische Größe. Auch KKN's Masse m wurde im physikalischen Unterraum erhalten. Aufgrund dessen brauchen wir die α -Terme in (3.24), welche UV-endlich sind (siehe (3.19) und (3.22)), nicht explizit anzugeben.

Das Resultat (3.24) ist identisch mit der 1-loop Ordnung der regularisierten 3D Yang-Mills-Theorie bei $T=0$ mit Kopplungskonstante $e^2 = g^2T$. Im statischen Limes gilt also

$${}^1\Pi_t(q) = {}^1\Pi_t^{\text{3D,reg.}}(q) = {}^1\Pi_t^{\text{3D}}(q) + g^2NT \int_p^3 \mathfrak{R} \quad . \quad (3.26)$$

Dies kann natürlich auch direkt nachgeprüft werden, indem wir ${}^1\Pi_t = \frac{1}{2}\text{Sp}(\mathbf{A} {}^1\Pi)$ (für ${}^1\Pi$ siehe (3.8)) in drei Dimensionen oder mittels Wick-Rotation in 2+1 Dimensionen (Metrik $+- -$) ermitteln, d.h. für $g^2\sum_P \rightarrow e^2\int_p^3$ und $G^{\mu\nu} = \mathbf{A}^{\mu\nu}/(P^2 - \tau^2) + \alpha \mathbf{D}^{\mu\nu}/P^2$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2$). Weil (3.24) die Größenordnung g^4T^2 besitzt, ist die 3D-Selbstenergie $\sim e^4$.

Für die 1-loop Ordnung der transversalen Selbstenergie im statischen Limes konnte also gezeigt werden, daß all jene Terme, welche nicht diagrammatischer Bestandteil der (unregularisierten) 3D-Euklidischen Yang-Mills-Theorie bei $T = 0$ sind, entweder Regulatorterme für die 3D-Selbstenergie darstellen oder aber verschwinden. Die Masse σ , in 4D ein IR-Regulator, dient in 3D als UV-Regulator, da sie groß gegenüber der Skala τ ist.

Wir begegnen hier der erstaunlichen Besonderheit der 3D-YM-Theorie, daß bereits Regularisierung (der erste Schritt im Renormierungsprogramm) zu einer endlichen Selbstenergie führt. Diese hängt dank (3.17) automatisch nicht mehr von der „Regulatormasse“ σ ab. Weder Z -Faktoren noch der Limes $\sigma \rightarrow \infty$ sind erforderlich.

3.3 2-loop transversale Selbstenergie — harte innere Impulse

Die 2-loop Diagramme sind in der zweiten und dritten Zeile in Abbildung 3.1 zusammengestellt. Aufgrund der IR-Regularisierung kommen zu diesen noch zwei „Kreuzchen-Diagramme“ (letzte Zeile in Abb. 3.1). Die analytischen Ausdrücke für die einzelnen

Diagramme, wie sie sich nach Anwendung der Graphenregeln ergeben, sind im Anhang D zu finden.

Aus den 2-*loop* Diagrammen präparieren wir jetzt jenen Beitrag zur transversalen Selbstenergie im statischen Limes, bei dem beide inneren Impulse *hard* (also $\sim T$) sind. Folglich können die Massen in den Propagatoren in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ vernachlässigt werden. Auch gehen wir so (obwohl mit nackten Linien arbeitend) etwaigen Infrarotschwierigkeiten aus dem Wege. Gegebenenfalls behalten wir uns IR-Manipulationen vor (siehe unten).

Wegen ihres generischen Vorfaktors g^4 bilden 2-*loop* Diagramme mit *hard* inneren Impulsen den offensichtlichsten Beitrag zur Ordnung $g^4 T^2$ der transversalen Selbstenergie. Sie wurden in Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) unter der Fragestellung, ob sie auf der transversalen Dispersionskurve im Limes $q \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow m_0$ einen Beitrag zur Ordnung $g^3 T^2$ liefern, in [11] analysiert. Hier dagegen geht es um die Beantwortung anderer Fragen, nämlich ob die Summe der 2-*loop* Diagramme mit *hard loop*-Impulsen im statischen Limes $Q_0 \rightarrow \omega = 0$ unabhängig von der Eichfixierung ist und, wenn ja, ob dieser Beitrag verschwindet. Dies wäre die dritte Null in (3.2). Der Fall, daß nicht beide *loop*-Impulse *hard* sind, wird in den nächsten Abschnitten untersucht.

Die große Anzahl der Terme, welche sich durch Summation der 13 2-*loop* Diagramme ((D.15) bis (D.23)) selbst für nackte Gluon-Linien $G_0^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{P^2}(\mathbf{g}^{\mu\nu} + (\alpha - 1)\mathbf{D}^{\mu\nu}(P))$ ergibt, lassen wir weitestgehend von MAPLE-Programmen zusammenfassen und vereinfachen. Außerdem sortieren wir nach $(\alpha - 1)$ -Potenzen und bilden die Spur mit $\frac{1}{2}\mathbf{A}$.

Terme $\sim (\alpha - 1)^5$ kommen in nur zwei Diagrammen vor, nämlich jene mit 5 Gluon-Linien. Diese Terme lassen sich noch von Hand auswerten. Konkret bedeutet das, in allen Gluon-Propagatoren der beiden Diagramme nur den D-Term ($D^{\mu\nu}(P) = P^\mu P^\nu / P^4$) zu berücksichtigen, die Lorentz-Skalarprodukte auszuführen und die dann entstandene Vielzahl von Termen zu sortieren. Gegebenenfalls führen Symmetrie-Eigenschaften bzw. das Verschieben eines *loop*-Impulses (z.B. $P \rightarrow K - P$ unter \sum_P) zur Reduzierung oder Vereinfachung der Terme. Die auf diese Weise behandelten $(\alpha - 1)^5$ -Terme kürzen sich in jedem der beiden Diagramme heraus.

Terme $\sim (\alpha - 1)^4$, $\sim (\alpha - 1)^3$ und $\sim (\alpha - 1)^2$ verschwinden für *supersoft* Q erst im statischen Limes, also bei $Q_0 = 0$ und $q \rightarrow 0$. Dies zu zeigen ist recht aufwendig. Die zur Hilfe genommenen MAPLE-Programme sind zum Teil im Anhang F angegeben. Diese Programme führen nicht nur die Lorentz-Kontraktionen aus, sondern berücksichtigen auch einige Symmetrie-Eigenschaften. Eine Verschiebung der Impulse unter den thermischen Summen führt nicht generell zur Vereinfachung. Die von MAPLE ausgegebenen Terme müssen wir einzeln danach untersuchen, ob eine Impulsverschiebung sinnvoll ist. In diesem Fall läßt sie sich am einfachsten per Hand ausführen. Die so veränderten Terme lassen wir wiederum von MAPLE-Programmen zusammenfassen und vereinfachen. Die am Ende noch übriggebliebenen Terme verschwinden unter Vernachlässigung von q^2 und \vec{q} im Zähler. Genauere Einzelheiten zur Vorgehensweise sind dem Anhang F zu entnehmen.

Die Terme $\sim (\alpha - 1)^1$ und $\sim (\alpha - 1)^0$ verschwinden dagegen nicht, auch wenn alle Symmetrien und alle zur Vereinfachung führenden Impuls-Verschiebungen ausgenutzt wurden. Der Unterschied zwischen $\sum_K 1/K^4$ und $\sum_K 1/(K^2(K - Q)^2)$ ist für $K \sim T$ irrelevant. Die Vernachlässigung aller Terme mit q im Zähler führt schließlich zu einem IR-konvergenten

Ausdruck, so daß ein Abschneiden der Integrale für kleine Impulse unnötig wird. Für den $(\alpha - 1)^1$ -Term erhalten wir

$${}^2\Pi_t^{hh}(Q)\Big|_{\sim(\alpha-1)} = 2g^4N^2 \left(-J_0(0)I_0 - J_0(0)I_1(Q) - I_0J_1(Q) + 2L(Q) \right) \quad (3.27)$$

mit

$$I_0 = \sum_P \frac{1}{P^2} = -\frac{T^2}{12} \quad , \quad J_0(Q) = \sum_P \frac{1}{P^2(P-Q)^2} \quad (3.28)$$

und

$$\begin{aligned} I_1(Q) &= \sum_P \frac{p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2}{p^2 q^2}\right)}{P^2(P-Q)^2} \quad , \quad J_1(Q) = \sum_P \frac{p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2}{p^2 q^2}\right)}{P^4(P-Q)^2} \quad , \\ L(Q) &= \sum_P \sum_K \frac{(PK) \left(\vec{p} \cdot \vec{k} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{k} \cdot \vec{q})}{q^2}\right)}{P^2(P-Q)^2 K^4(K-Q)^2} = -\frac{1}{2}I_1(Q)J_1(Q) \quad . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Für das zweite Gleichheitszeichen in $L(Q)$ fand der spärliche Cosinussatz Verwendung : $q^2(\vec{p} \cdot \vec{k}) = (\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{k} \cdot \vec{q}) + |\vec{p} \times \vec{q}| |\vec{k} \times \vec{q}| \cos(\varphi)$, darin ist $\varphi \in [0, 2\pi]$ der Polarwinkel. Terme $\sim \cos(\varphi)$ verschwinden unter $\int_p^3 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \int_{-1}^{+1} d\cos(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi$, während Terme $\sim \cos^2(\varphi)$ einen Faktor $\frac{1}{2}$ geben. Schließlich führen wir den Limes $\omega \rightarrow 0$ (und erst danach $q \rightarrow 0$) aus. Auf die Eigentümlichkeiten dieses Limes wird im Anhang E im Detail eingegangen. Das Ergebnis ist $I_1(Q) \rightarrow -I_0$. Damit wird

$${}^2\Pi_t^{hh}(Q)\Big|_{\sim(\alpha-1)} = -2g^4N^2 \left(J_0(0) + J_1(Q) \right) \left(I_0 + I_1(Q) \right) \rightarrow 0 \quad . \quad (3.30)$$

Folglich ist in diesem Limes der 2-loop Beitrag mit nackten Gluon-Linien α -unabhängig.

Der Beitrag ${}^2\Pi_t^{hh}$ zur transversalen Selbstenergie ist damit auf den $(\alpha - 1)^0$ -Term reduziert. Für diesen Term erhalten wir mit Hilfe von MAPLE, Ausnutzung von Symmetrie-Eigenschaften und Vernachlässigung von \vec{q} (bzw. q^2) im Zähler den Ausdruck

$${}^2\Pi_t^{hh}(Q) = -4g^4N^2 \left(I_1(Q)J_0(Q) - 2I_0J_1(Q) \right) \rightarrow 0 \quad , \quad (3.31)$$

welcher wegen $-2J_1(Q) \rightarrow J_0(Q)$ im statischen Limes verschwindet. Dies ist die dritte Null in Gleichung (3.2).

Nachdem wir zeigen konnten, daß ${}^2\Pi_t^{hh}$ im statischen Limes verschwindet, bleiben nun noch jene Anteile von ${}^2\Pi_t$ zu untersuchen, in welchen nicht beide loop-Impulse *hard* sind. Hierin müssen alle g^4 -Beiträge der 2-loop Ordnung der 3D-Euklidischen Theorie enthalten sein. Während wir für ${}^2\Pi_t^{hh}$ alle 2-loop Diagramme gemeinsam behandelt haben, unterteilen wir jetzt in zwei-Gluon-reduzible (2PR-) und zwei-Gluon-irreduzible (2PI-) Diagramme. Vorgreifend sei erwähnt, daß wir (anders als in 1-loop Ordnung) den 3D-Anteil nebst eines Regulators nicht explizit angeben werden können.

3.4 2-loop 2PR-Diagramme

Die 2PR-Diagramme sind in der dritten und vierten Zeile der Abbildung 3.1 zu finden. Wir fassen sie zusammen zu

$$\frac{1}{2} \text{---}\bullet\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\times\text{---} + 1 \text{---}\bullet\text{---} + 1 \text{---}\times\text{---} \quad (3.32)$$

mit

$$\text{---}\bullet\text{---} = \frac{1}{2} \text{---}\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\text{---} + 1 \text{---}\text{---} \quad (3.33)$$

(3.33) ist die 1-loop Selbstenergie ${}^1\Pi$. Mit Anhang D und der Abkürzung $\mathbf{X}(K) := {}^1\Pi(K) - \mathbf{Y}(K)$ läßt sich (3.32) in analytischer Form angeben :

$$\begin{aligned} {}^2\Pi^{2\text{PR}\mu\nu}(Q) = & g^2 N \sum_K \left\{ \left(G(K) \mathbf{X}(K) G(K) \right)^{\mu\nu} - \text{Sp} \left(G(K) \mathbf{X}(K) G(K) \right) g^{\mu\nu} \right. \\ & - 2 \left((K - 2Q) G(K) \mathbf{X}(K) G(K) G(K - Q) \right)^{\mu} (2K - Q)^{\nu} \\ & - 2 \left((K + Q) G(K - Q) G(K) \mathbf{X}(K) G(K) \right)^{\mu} (2K - Q)^{\nu} \\ & + 2 \left((K - 2Q) G(K) \mathbf{X}(K) G(K) \right)^{\mu} \left((K + Q) G(K - Q) \right)^{\nu} \\ & + \text{Sp} \left(G(K) \mathbf{X}(K) G(K) G(K - Q) \right) (2K - Q)^{\mu} (2K - Q)^{\nu} \\ & + \left[(K + Q) G(K - Q) (K + Q) \right] \left(G(K) \mathbf{X}(K) G(K) \right)^{\mu\nu} \\ & \left. + \left[(K - 2Q) G(K) \mathbf{X}(K) G(K) (K - 2Q) \right] G^{\mu\nu}(K - Q) \right\}. \quad (3.34) \end{aligned}$$

3.4.1 Präparieren der g^4 -Beiträge

Wegen des statischen Limes ($Q_0 = 0$) und der gewählten IR-Regularisierung erweist es sich als sinnvoll von der zum 2PR-loop gehörigen K -Integration die $K_0 = 0$ -Mode abzuspalten: $\sum_K = \sum'_K + T \int_k^3$. Der Strich an \sum_K steht für $K_0 \neq 0$. Wegen der zwei Propagatoren gleichen Impulses im 2PR-loop führt diese Aufteilung, anders als in Abschnitt 3.2, nicht zu UV-Divergenzen. Die Aufteilung eines beliebigen 2-loop 2PR-Diagramms ist symbolisch in Abbildung 3.2 dargestellt. Da der IR-Regulator auf $K_0 = 0$ beschränkt ist, sind die Gluon-Propagatoren $G(K)$ und $G(K - Q)$, die diesen loop bilden, unter \sum'_K nackt, während sie unter \int_k^3 massiv, dafür aber 3D-Euklidisch sind (siehe (3.4)).

Für nicht-verschwindendes K_0 reduziert sich $\mathbf{X}(K)$ auf die Selbstenergie ${}^1\Pi(K)$. Für diese nehmen wir die aus Abschnitt 3.2 bekannte Aufteilung vor: ${}^1\Pi = {}^1\Pi_{(0)} + {}^1\Pi_{(-)}$ mit ${}^1\Pi_{(-)} = {}^1\Pi - {}^1\Pi_{(0)}$.

${}^1\Pi_{(-)}$ ist UV-konvergent. Aufgrund der minimalen IR-Regularisierung (3.3) reduziert sich die loop-Integration \sum_P auf $T \int_p^3$. Die Propagatoren unter \int_p^3 enthalten Massen.

Da ${}^1\Pi_{(0)}$ die führende Ordnung der Selbstenergie beinhaltet, bekommt der longitudinale Anteil von ${}^1\Pi_{(-)}$ die Größenordnung $g^2 T \sigma$, während der transversale Teil $\sim g^2 T \tau$ ist. Der entsprechende Beitrag zu ${}^2\Pi_t$ ist wegen $K \sim T$ (für $K_0 \neq 0$) $\sim g^4 T \sigma$ bzw. $\sim g^4 T \tau$, liefert also keinen Beitrag zu $\mathcal{O}(g^4)$.

Im Anteil mit $K_0 \neq 0$ und ${}^1\Pi_{(0)}$ (Abbildung 3.2) sind alle Linien nackt. In führender Ordnung (also $\mathcal{O}(g^4)$) ist die Temperatur die einzige Impulsskala. Der Impuls der 1-loop-Einsetzung läßt sich auf den *hard*-Bereich einschränken. Wegen $K_0 \neq 0$ ist auch die thermische K -Integration auf *hard* Impulse beschränkt. Dennoch ist dies nicht der komplette *hard-hard* Anteil der 2PR-Diagramme. Auch die $K_0 = 0$ -Mode enthält *hard*-Beiträge. Wird die thermische Integration über den 2PR-loop auf alle *hard* K -Impulse erweitert, dann muß jener Anteil mit *hard* räumlichen Impuls \vec{k} subtrahiert werden. Der *hard-hard* Anteil der 2PR-Diagramme gehört zum Beitrag ${}^2\Pi_t^{hh}$, welcher, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, verschwindet.

Da jener Anteil mit $K_0 \neq 0$ vollständig im *hard-hard*-Anteil enthalten ist, kann die K -Integration auf ihren $K_0 = 0$ -Beitrag reduziert werden, wobei der entsprechende *hard-hard* Beitrag (für $K_0 = 0$) subtrahiert werden muß. Die Differenz ist sowohl UV- als auch IR-konvergent.

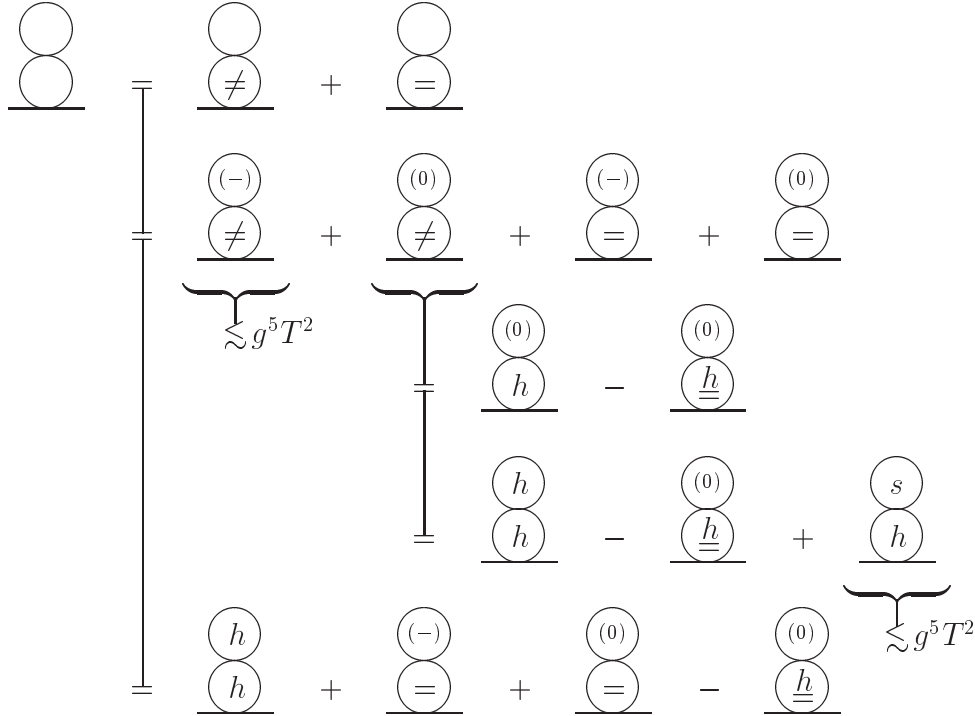


Abbildung 3.2: Die Zerlegung eines Beispiel-2PR-Diagramms, wie sie im Text erklärt ist.

1. Zeile: Aufteilung des 2PR-loops in $K_0 \neq 0$ und $K_0 = 0$.
2. Zeile: Aufteilung der 1-loop-Einsetzung in ${}^1\Pi_{(-)}$ und ${}^1\Pi_{(0)}$.
3. und 4. Zeile: Abspaltung des *hard-hard*-Anteils. Die Bezeichnung \underline{h} steht für $K_0 = 0, k \sim T$.
5. Zeile: Die in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ beitragenden Diagrammteile. Die letzten beiden Diagramme sind nur in der Differenz endlich.

Im letzten Abschnitt haben wir Abschneideparameter, welche die *loop*-Integrationen auf den *hard*-Bereich beschränken, vermieden. Dies ist im Limes $Q_0 = 0$, $q \rightarrow 0$ erlaubt, sofern keine IR-Divergenzen auftreten. Wird Q im Zähler vernachlässigt, dann heben sich alle $1/K^4$ -Beiträge, welche ohne Abschneidung des K -Integrals IR-divergent sind, weg. Jene *hard-hard*-Terme, welche im letzten Abschnitt zu der Null führten, müssen nun den 2PR- und 2PI-Diagrammen zugeordnet werden. Diese Aufgabe lassen wir, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, von MAPLE-Programmen ausführen. Die Summe der 2PR-*hard-hard*-Terme verschwindet nicht (erst die Summe aller Diagramme gibt Null). Reduzieren wir hier nun die thermische K -Integration auf die $K_0 = 0$ -Mode, dann bekommen wir den gewünschten *hard-hard* Beitrag, welcher von den 2PR-Diagrammen für $K_0 = 0$ subtrahiert werden muß.

Für $K_0 = Q_0 = 0$ reduziert sich die 1-*loop* Selbstenergie-Einsetzung in (3.34) auf ${}^1\Pi(k) = \Pi_t(k)\mathbf{A}(\vec{k}) + \Pi_\ell(k)U \circ U + \Pi_d(k)\mathbf{D}(\vec{k})$. Der C-Anteil von ${}^1\Pi$ fällt deswegen heraus, weil er nur in den Kombinationen $QC(K)Q$ und $\tilde{Q}C(K)\tilde{Q}$ (K, Q seien beliebig) vorkommt, welche bei $K_0 = Q_0 = 0$ verschwinden. Aus (3.34) bekommen wir in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ für die Differenz ${}^2\Pi_{t(-)}^{2\text{PR}} := {}^2\Pi_t^{2\text{PR}} - {}^2\Pi_t^{2\text{PR}, hh}$ daher

$$\begin{aligned} {}^2\Pi_{t(-)}^{2\text{PR}}(q) &= g^2 N T \int_k^3 \left\{ \Delta_\sigma^2 ({}^1\Pi_\ell - \sigma^2) \mathcal{B}_0 + \Delta_\sigma^2 \Delta_\sigma^- ({}^1\Pi_\ell - \sigma^2) \mathcal{B}_1 \right. \\ &\quad + \Delta_\tau^2 ({}^1\Pi_t - \tau^2) \mathcal{A}_0 + \Delta_\tau^2 \Delta_\tau^- ({}^1\Pi_t - \tau^2) \mathcal{A}_1 \\ &\quad + \alpha \Delta_\tau^2 \Delta_0^- ({}^1\Pi_t - \tau^2) \mathcal{A}'_1 \\ &\quad + \alpha^2 \Delta_0^3 {}^1\Pi_d \mathcal{D}_1 + \alpha^2 \Delta_0^3 \Delta_\tau^- {}^1\Pi_d \mathcal{D}_2 + \alpha^3 \Delta_0^3 \Delta_0^- {}^1\Pi_d \mathcal{D}'_2 \\ &\quad \left. - (\text{hard-Anteil}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Der subtrahierte *hard*-Anteil ist jener, welcher in Abbildung 3.2 im letzten Diagramm symbolisiert ist. Aus Gründen der Übersicht verwendeten wir folgende Abkürzungen:

$$\mathcal{B}_0 \equiv -1 \quad , \quad \mathcal{B}_1 \equiv -2 \left[K \mathbf{A}(Q) K \right] \quad , \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &\equiv \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\mathbf{A}(K) \mathbf{A}(Q) \right) - 2 \quad , \quad \mathcal{A}'_1 \equiv \frac{1}{2} \frac{(k^2 - q^2)^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \text{Sp} \left(\mathbf{A}(K) \mathbf{A}(Q) \right) \quad , \\ \mathcal{A}_1 &\equiv -4 \left[Q \mathbf{A}(K) \mathbf{A}(K - Q) \mathbf{A}(Q) K \right] + 4 \left[Q \mathbf{A}(K - Q) \mathbf{A}(K) \mathbf{A}(Q) K \right] \\ &\quad + 4 \left[Q \mathbf{A}(K) \mathbf{A}(Q) \mathbf{A}(K - Q) K \right] - 2 \text{Sp} \left(\mathbf{A}(K) \mathbf{A}(K - Q) \right) \left[K \mathbf{A}(Q) K \right] \\ &\quad - 2 \text{Sp} \left(\mathbf{A}(K) \mathbf{A}(Q) \right) \left[K \mathbf{A}(K - Q) K \right] - 2 \text{Sp} \left(\mathbf{A}(K - Q) \mathbf{A}(Q) \right) \left[Q \mathbf{A}(K) Q \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &\equiv -\frac{1}{2} \left[K \mathbf{A}(Q) K \right] - k^2 \quad , \quad \mathcal{D}'_2 \equiv -\frac{1}{2} \frac{q^4}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \left[K \mathbf{A}(Q) K \right] \quad , \\ \mathcal{D}_2 &\equiv \frac{1}{2} \left(k^2 - 2 \vec{k} \vec{q} \right)^2 \text{Sp} \left(\mathbf{A}(K - Q) \mathbf{A}(Q) \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die Produkte mit den Matrizen \mathbf{A} (sie besitzen keine K_0 -, Q_0 -Abhängigkeit) sind dem Anhang C zu entnehmen. Damit folgt

$$\mathcal{B}_0 = -1 \quad , \quad \mathcal{B}_1 = 2k^2 \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \quad , \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= -1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \quad , \quad \mathcal{A}'_1 = \frac{(k^2 - q^2)^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \right) \quad , \\ \mathcal{A}_1 &= 4(k^2 + q^2) \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) + 4 \frac{k^2 q^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= -k^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \right) \quad , \quad \mathcal{D}'_2 = \frac{1}{2} \frac{k^2 q^4}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \quad , \\ \mathcal{D}_2 &= \left(k^2 - 2 \vec{k} \vec{q} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{(\vec{k} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right) \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die Subtraktion des *hard*-Anteils in (3.35) sorgt für UV-Konvergenz. In diesem Anteil ist es ausreichend, die k -Integration auf *hard* Impulse zu beschränken. Die 1-*loop*-Einsetzung trägt in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ für *hard* k ohnehin nur dann bei, sofern auch der innere Impuls *hard* ist.

Eine Abschätzung der Größenordnung besagt, daß keiner der Terme in (3.35) vernachlässigt werden darf. In der ersten Zeile wird die führende Ordnung der 1-*loop* longitudinalen Selbstenergie-Einsetzung durch σ^2 subtrahiert. Es gibt daher keinen Term, welcher die Ordnung der 2PR-Diagramme auf $\sim g^3 T^2$ reduziert [30]. Alle Terme sind $\sim g^4 T^2$.

3.4.2 Abspalten des 3D-Anteils

Es gilt nun, den regularisierten 3D-Anteil der 2-*loop* 2PR-Diagramme aus (3.35) abzuspalten. In nicht-regularisierter Form ist dieser formal leicht abzulesen :

$$\begin{aligned} {}^2H_t^{2\text{PR}3\text{D}}(q) &= g^2 N T \int_k^3 \left\{ \left({}^1H_t^{3\text{D}} - \tau^2 \right) \left(\Delta_\tau^2 \mathcal{A}_0 + \Delta_\tau^2 \Delta_\tau^- \mathcal{A}_1 + \alpha \Delta_\tau^2 \Delta_0^- \mathcal{A}'_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + {}^1H_d^{3\text{D}} \left(\alpha^2 \Delta_0^3 \mathcal{D}_1 + \alpha^2 \Delta_0^3 \Delta_\tau^- \mathcal{D}_2 + \alpha^3 \Delta_0^3 \Delta_0^- \mathcal{D}'_2 \right) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Der Spielzeugparameter τ ist jetzt der IR-Regulator der 3D-Theorie. Die 2-*loop* Ordnung in der 3D-Theorie muß nicht α -unabhängig sein. Sie ist in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ nur ein Teil des Linde-Sees, welcher im ganzen natürlich nicht mehr vom Eichfixierungsparameter α abhängen darf (siehe hierzu auch §3.2.3).

In 1-*loop* Ordnung benötigen die α -Terme keinen Regulator, da sie UV-konvergent sind. Sie wurden im Resultat (3.24) nicht explizit aufgeführt. In 2-*loop* Ordnung ist wegen der doppelten *loop*-Integration und eventuell überlappender Divergenzen eine Aussage über UV-Konvergenz des α -Anteils in 3D schwieriger. Wie eine grobe Abschätzung zeigt, kann nicht von Konvergenz aller Integrale ausgegangen werden. Dennoch werden wir im folgenden die α -Terme nicht mehr explizit aufführen.

Auch für die α -unabhängigen Terme in (3.42), welche als 1-*loop*-Einsetzung nur noch ${}^1\Pi_t$ enthalten, erweist sich das Separieren der UV-Regulatoren aus (3.35) als recht schwierig. Dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels ist zu entnehmen, daß für *supersoft* k (und q) ${}^1\Pi_t(k)$ in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ identisch ist mit ${}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}}(k)$. Jener Anteil mit $k \gg \tau$ wird in (3.35) in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ durch den *hard*-Beitrag subtrahiert. In diesem müssen also Regulatoren für das k -Integral in (3.42) verborgen liegen (sofern es divergiert). Symbolisch läßt sich der regularisierte 3D-Anteil der 2PR-Diagramme folgendermaßen schreiben :

$${}^2\Pi_t^{2\text{PR } 3\text{D,reg.}}(q) = g^2 NT \int_k^3 \left({}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}} - \tau^2 \right) \cdot \left(\Delta_\tau^2 \mathcal{A}_0 + \Delta_\tau^2 \Delta_\tau^- \mathcal{A}_1 + \mathfrak{R}'_k + (\alpha\text{-Terme}) \right). \quad (3.43)$$

Der Regulator \mathfrak{R}'_k sorgt dafür, daß der k -Impuls im *supersoft* Bereich festgehalten wird. Die 1-*loop*-Einsetzung kann daher dem 1-*loop*-Resultat (3.24) entnommen werden. Der hierin enthaltene Regulator für das p -Integral ist jener in (3.25). Den Regulator \mathfrak{R}'_k werden wir aus Gründen, welche im folgenden genannt sind, nicht explizit angeben.

Wie in Abschnitt 3.2 unterteilen wir ${}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}}$ in einen nur aus nackten Propagatoren bestehenden Teil ${}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}}$ und der Differenz ${}^1\Pi_{t(-)}^{3\text{D}} = {}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}} - {}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}}$. Der Regulator (3.25) in ${}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}}$ ist vollständig in ${}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}}$ enthalten. Das Integral in ${}^1\Pi_{t(-)}^{3\text{D}}$ konvergiert. Für $k \rightarrow \infty$ bleibt ${}^1\Pi_{t(-)}^{3\text{D}}$ ebenfalls endlich, so daß für diesen Anteil der 1-*loop*-Einsetzung auch das k -Integral in (3.43) keinen Regulator benötigt.

Jener 1-*loop*-Anteil mit nackten Propagatoren (er ist identisch mit ${}^1\Pi_{t(0)}$ in 4D) ist im Anhang D ausgewertet: ${}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}} \sim g^2 T k$. Er ist also linear in k , was in (3.43) zu einer logarithmischen UV-Divergenz führt. Diese Divergenz muß durch einen Regulator \mathfrak{R}_k beseitigt werden. (3.43) läßt sich nun wie folgt umschreiben :

$${}^2\Pi_t^{2\text{PR } 3\text{D,reg.}}(q) = g^2 NT \int_k^3 \left\{ \left({}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}} - \tau^2 \right) \left(\Delta_\tau^2 \mathcal{A}_0 + \Delta_\tau^2 \Delta_\tau^- \mathcal{A}_1 + (\alpha\text{-Terme}) \right) + {}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}} \mathfrak{R}_k \right\}. \quad (3.44)$$

Damit der Regulator \mathfrak{R}_k die logarithmische UV-Divergenz in der ersten Zeile von (3.44) beseitigt, muß er sich für große k wie $-4/(3k^4)$ verhalten ($\Delta_\tau^2 \mathcal{A}_0 + \Delta_\tau^2 \Delta_\tau^- \mathcal{A}_1 \rightarrow 4/(3k^4)$ für $k \rightarrow \infty$), während er an der unteren Integrationsgrenze verschwinden sollte.

Ein Regulator, welcher die eben genannten Bedingungen erfüllt, existiert nicht. Denn jedes dimensionsbehaftete logarithmisch UV-divergente Integral mit den Integrationsgrenzen 0 und ∞ liefert an der unteren Integrationsgrenze einen endlichen oder ebenfalls

logarithmisch divergenten Beitrag ($\ln(k)$ divergiert sowohl für $k \rightarrow \infty$ als auch für $k \rightarrow 0$, während $\ln(k + M)$ für $k \rightarrow 0$ endlich ist).

Wie der Regulator \mathfrak{R}_k auch gewählt wird, das Resultat ${}^2\Pi_t^{2\text{PR}3\text{D},\text{reg.}}$ hängt von der Regulatormasse M ab. Zudem divergieren die M -abhängigen Terme für $M \rightarrow \infty$ logarithmisch. Diese M -Abhängigkeit sollte sich mit einer logarithmischen M -Abhängigkeit der regularisierten 3D-2PI-Diagramme kompensieren. Wäre dies nicht der Fall, dann wäre die Abspaltung des regularisierten 3D-Anteils der 2-loop Diagramme nicht möglich.

Im folgenden gehen wir davon aus, daß sich die logarithmische M -Abhängigkeit in 2-loop Ordnung kompensieren wird. Im Gegensatz zur 1-loop Ordnung ist es aber unwahrscheinlich, daß ${}^2\Pi_t$ identisch ist mit ${}^2\Pi_t^{3\text{D},\text{reg.}}$. Wie im folgenden Unterabschnitt deutlich werden wird, liefern die Δ_σ -Terme in der ersten Zeile von (3.35) (auch bei $M = \sigma$) einen endlichen, von σ unabhängigen Beitrag zur transversalen Selbstenergie im statischen Limes. Im Prinzip könnte dieser endliche Beitrag natürlich durch Terme von 2PI-Diagrammen (welche nicht zum 3D-Anteil gehören) kompensiert werden. Diese Möglichkeit halten wir offen, dürfen wohl aber nicht davon ausgehen.

Es ist also möglich, daß die Differenz ${}^2\Pi_t^{ss} := {}^2\Pi_t - {}^2\Pi_t^{3\text{D},\text{reg.}}$ in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ einen endlichen Beitrag zur transversalen Selbstenergie im statischen Limes liefert. Dies steht im Widerspruch zu der in [24] geäußerten Auffassung, wonach σ -Propagatoren nur als Regulatoren für den 3D-Anteil dienen sollten und, daß daher, wegen Verschwinden des *hard-hard*-Anteils, die transversale Selbstenergie im statischen Limes identisch ist mit jener einer regularisierten 3D-Theorie.

3.4.3 Nicht zum 3D-Anteil gehörende 2PR-Terme

Die Terme in der ersten Zeile von (3.35) haben nach Subtraktion ihres *hard-hard*-Anteils die Größenordnung $g^4 T^2$, gehören aber nicht zum 3D-Anteil. Der äußere Impuls q kann gegenüber σ vernachlässigt werden. Führen wir noch die Winkelintegration zwischen q und k aus, dann erhalten wir (ss im Index steht für *soft-soft*)

$${}^2\Pi_{t(-)}^{2\text{PR}ss} =: \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad \text{mit} \quad (3.45)$$

$$\mathcal{M}_1 = g^2 NT \int_k^3 \left\{ {}^1\Pi_{\ell(-)}(k) \Delta_\sigma^2(k) \left(-1 + \frac{4}{3} k^2 \Delta_\sigma(k) \right) \right\}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = g^2 NT \int_k^3 \left\{ \left({}^1\Pi_{\ell(0)}(k) - \sigma^2 \right) \Delta_\sigma^2(k) \left(-1 + \frac{4}{3} k^2 \Delta_\sigma(k) \right) \right. \\ \left. - (\text{hard-Anteil}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Die 1-loop-Einsetzung ${}^1\Pi_\ell$ unterteilen wir in einen nur aus nackten Gluon-Linien bestehenden Teil ${}^1\Pi_{\ell(0)}$ und der Differenz ${}^1\Pi_{\ell(-)} := {}^1\Pi_\ell - {}^1\Pi_{\ell(0)}$. Die Subtraktion des *hard*-Anteils in \mathcal{M}_2 sorgt für UV-Konvergenz und hält den Impuls \vec{k} im *soft*-Bereich fest. In \mathcal{M}_1 ist die k -Integration, wie sich zeigen wird, automatisch auf *soft* Impulse beschränkt.

Entgegen früherer Annahme liefert (3.45) einen endlichen Beitrag der Ordnung $g^4 T^2$. Dies zu bestätigen erfordert die explizite Berechnung von (3.45). Hierfür benötigen wir die Auswertung der 1-*loop*-Einsetzung, welche im Fall von ${}^1\Pi_{\ell(0)}(k)$ für *soft* äußeren Impuls k im Anhang D durchgeführt ist. Die Differenz ${}^1\Pi_{\ell(-)}(k)$ ergibt sich aus (D.1) zu $\text{Sp}({}^1\Pi(K)\mathbf{B}(K))|_{K_0=0} - {}^1\Pi_{\ell(0)}(k)$. Aufgrund der minimalen IR-Regularisierung (3.3) reduziert sich die *loop*-Integration auf die $P_0 = 0$ -Mode. Für *soft* k ($\tau \ll k$) erhalten wir für Terme bis einschließlich $\mathcal{O}(g^3 T^2)$

$${}^1\Pi_{\ell(-)}(k) = g^2 N T \int_p^3 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \sigma^2} \right) \left(\frac{4 k^2 p^2}{(\vec{k} - \vec{p})^4} \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{p})^2}{k^2 p^2} \right) + \alpha \frac{(p^2 - k^2)^2}{(\vec{k} - \vec{p})^4} \right) . \quad (3.48)$$

Die hierin enthaltenen Winkelintegrationen entnehmen wir (D.6) und (D.7). Zwei der verbliebenen p -Integrale finden wir in (D.11) und (D.12). Ein weiteres p -Integral kann per Differentiation nach k gelöst werden: $\int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + \sigma^2} \ln\left(\frac{|p-k|}{p+k}\right) = -\pi \arctan\left(\frac{k}{\sigma}\right)$. Damit erhalten wir das aus [49] bekannte Resultat

$${}^1\Pi_{\ell(-)}(k) = \frac{1}{4} g^2 N T \left(k - \frac{2}{\pi} \frac{k^2 - \sigma^2}{k} \arctan\left(\frac{k}{\sigma}\right) - \frac{\sigma}{\pi} (2 - \alpha) \right) , \quad (3.49)$$

welches für $k \rightarrow \infty$ verschwindet. Das Integral \mathcal{M}_1 ist also endlich und der Impuls k durch σ skaliert.

Das k -Integral in \mathcal{M}_1 kann mit (3.49) nun explizit ausgewertet werden. Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & \frac{g^4 N^2 T^2}{24\pi^3} \left(-5\pi \mathcal{J}_2 + 4\pi \mathcal{J}_3 - 2\hat{\mathcal{J}}_0 + 12\hat{\mathcal{J}}_1 - 28\hat{\mathcal{J}}_2 + 16\hat{\mathcal{J}}_3 \right. \\ & \left. - (2 - \alpha) (\mathcal{J}'_1 - 5\mathcal{J}'_2 + 4\mathcal{J}'_3) \right) . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die hierin enthaltenen Integrale $\mathcal{J}_{2,3}$ und $\mathcal{J}'_{1,2,3}$ sind standard. Die Integrale $\hat{\mathcal{J}}_{0,1,2,3}$ lassen sich mittels partieller Integration lösen:

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^\infty dk \frac{k \sigma^2}{(k^2 + \sigma^2)^2} = \frac{1}{2} , \quad \mathcal{J}_3 = \int_0^\infty dk \frac{k \sigma^4}{(k^2 + \sigma^2)^3} = \frac{1}{4} , \quad (3.51)$$

$$\mathcal{J}'_1 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma}{(k^2 + \sigma^2)} = \frac{\pi}{2} , \quad \mathcal{J}'_2 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma^3}{(k^2 + \sigma^2)^2} = \frac{\pi}{4} , \quad \mathcal{J}'_3 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma^5}{(k^2 + \sigma^2)^3} = \frac{3\pi}{16} , \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathcal{J}}_0 = \int_0^\infty dk \frac{k \text{a}(k/\sigma) - k \pi/2}{(k^2 + \sigma^2)} = -\frac{\pi}{2} \ln(2) , \quad \hat{\mathcal{J}}_1 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma^2 \text{a}(k/\sigma)}{k (k^2 + \sigma^2)} = -\frac{1}{2} \mathcal{I}'_1 ,$$

$$\hat{\mathcal{J}}_2 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma^4 \text{a}(k/\sigma)}{k (k^2 + \sigma^2)^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{J}'_2 - \frac{1}{2} \mathcal{I}'_1 , \quad \hat{\mathcal{J}}_3 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma^6 \text{a}(k/\sigma)}{k (k^2 + \sigma^2)^3} = -\frac{1}{2} \mathcal{J}'_2 - \frac{1}{4} \mathcal{J}'_3 - \frac{1}{2} \mathcal{I}'_1 \quad (3.53)$$

mit $a(k/\sigma) := \arctan(k/\sigma)$ und $\mathcal{I}'_1 = \int_0^\infty dk \frac{\sigma}{k^2 + \sigma^2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 + \sigma^2}\right)$. Da $\mathcal{J}'_1 - 5\mathcal{J}'_2 + 4\mathcal{J}'_3 = 0$, hängt \mathcal{M}_1 nicht von α ab. Das Integral \mathcal{I}'_1 muß nicht ausgewertet werden, da es in (3.50) entfällt. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g^4 N^2 T^2}{8\pi^2} \left(\frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{4} \right). \quad (3.54)$$

Die 1-loop-Einsetzung ${}^1\Pi_{\ell(0)}(k)$ in \mathcal{M}_2 ist für *soft* k im Anhang D ausgewertet: ${}^1\Pi_{\ell(0)}(k) = \sigma^2 - \frac{1}{4}g^2 N T k$ mit $\sigma^2 \equiv m_{el}^2$. Für \mathcal{M}_2 erhalten wir damit analog zu (3.50)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = & \frac{g^4 N^2 T^2}{24\pi^2} (5\mathcal{J}_2 - 4\mathcal{J}_3) \\ & - \frac{g^4 N^2 T^2}{12} \int_k^3 \left\{ \frac{1}{k(k^2 + \sigma^2)} - (\text{hard-Anteil}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die Integrale $\mathcal{J}_{2,3}$ sind in (3.51) angegeben. Das Integral in der zweiten Zeile von (3.55) ist logarithmisch UV-divergent. Die Divergenz wird jedoch durch den *hard*-Anteil subtrahiert. Dieser enthält als IR-Regulator den äußeren Impuls q . Das Ergebnis wird also einen Term $\sim g^4 T^2 \ln(q/\sigma)$ enthalten, welcher die Ordnung um $\ln(g)$ reduziert. Die *hard-hard*-Beiträge verschwinden in der Summe aller Diagramme. Es besteht daher durchaus noch die Möglichkeit, daß sich der $g^4 T^2 \ln(q/\sigma)$ -Term in (3.55) mit eben solchen Termen aus den 2PI-Diagrammen weghebt.

Der endliche, nicht-ordnungsreduzierende Anteil von ${}^2\Pi_{t(-)}^{2PR ss}$, wir bezeichnen ihn mit ${}^2\Pi_{t(-)}^{2PR ss, g^4}$, liefert in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ den Beitrag

$${}^2\Pi_{t(-)}^{2PR ss, g^4} = \frac{g^4 N^2 T^2}{8\pi^2} \left(\frac{\ln(2)}{3} + \frac{1}{4} \right), \quad (3.56)$$

welcher nicht von α abhängt. Zu untersuchen bleibt aber, ob jene α -Terme in (3.35), welche ${}^1\Pi_d$ enthalten, ausschließlich dem regularisierten 3D-Anteil zugeordnet werden können.

3.5 2-loop 2PI-Diagramme

Die 2PI-Diagramme (zweite Zeile in Abbildung 3.1) lassen sich nicht auf 1-loop Diagramme zurückführen. Eine Auswertung der Diagramme ist erheblich aufwendiger. Dieser Abschnitt wird deshalb auch nur qualitative Aussagen liefern können.

Zu den 2PI-Diagrammen zählen wir auch das zwei-Geist-reduzible Diagramm (in Abbildung 3.1 das letzte der zweiten Zeile). Da die Geist-Propagatoren nackt sind, führt dieses, anders als die zwei-Gluon-reduziblen Diagramme, zu keiner Ordnungsreduktion. Auch ist es wegen Antisymmetrie der Geist-Vertizes nicht IR-divergent, obwohl eine Abschätzung der Größenordnung dies auf den ersten Blick vermuten ließe.

3.5.1 Präparieren der g^4 -Beiträge

Die nun folgende Aufteilung der Diagramme erläutern wir am Beispiel des ersten Diagramms der zweiten Zeile in Abbildung 3.1. Mit Anhang D und Spurbildung mit $\frac{1}{2}\mathbf{A}(Q)$ erhalten wir im statischen Limes

$$\begin{aligned} \Pi_t^\ominus(q) = \frac{3}{4}g^4N^2 \sum_{K,P} \Big\{ & \text{Sp}\big(G(K)G(K-P)\big)\text{Sp}\big(G(P-Q)\mathbf{A}(Q)\big) \\ & - \text{Sp}\big(G(K)G(K-P)G(P-Q)\mathbf{A}(Q)\big) \Big\}_{Q_0=0} . \end{aligned} \quad (3.57)$$

In beiden *loop*-Integrationen spalten wir von der Frequenzsumme die Null-Mode ab, d.h. wir unterteilen in $P_0 = 0$ und $P_0 \neq 0$ bzw. $K_0 = 0$ und $K_0 \neq 0$. Anschließend separieren wir den *hard-hard*-Anteil, wie es in Abbildung 3.3 veranschaulicht ist. Die Differenz $\Pi_t^\ominus - \Pi_t^{\ominus hh}$ ist konvergent. In dieser Differenz kann das Diagramm nun weiter in endliche Anteile zerlegt werden. Aufgrund der thermisch generierten Massen gibt es drei Impulsskalen: T , σ , τ .

- Der Fall, daß beide *loop*-Impulse auf T skaliert werden können, ist wegen Subtraktion des *hard-hard*-Anteils nicht enthalten.
- Terme, in denen die Impulse K , P unterschiedliche Skalen besitzen, sind $\lesssim g^5T^2$, wie ein Abschätzen der Größenordnung in (3.57) zeigt. Beispiel: $K \sim T$, $P_0 = 0$. In Propagatoren, welche von K abhängen, können die Massen σ und τ vernachlässigt werden. Nur in einem Propagator bleiben die Massen erhalten. Sie geben die Skala der räumlichen p -Integration vor. Die Terme sind somit $\sim g^4\sigma T$ bzw. $\sim g^4\tau T$.
- In Termen mit $K_0 = P_0 = 0$ sind alle Gluon-Propagatoren in ihren transversalen (τ enthaltenden) und longitudinalen (σ enthaltenden) Sektor zu unterteilen. Drei Fälle sind zu unterscheiden: Terme, welche nur τ -Propagatoren enthalten, gehören zum 3D-Anteil. Der subtrahierte *hard-hard*-Anteil dient vermutlich ausschließlich der UV-Regularisierung, so daß diese Terme in der Summe den kompletten 3D-Anteil des behandelten Diagramms bilden. Sofern genau ein σ -Propagator enthalten ist, sind die Impulse unterschiedlich skaliert (einer auf *soft*, der andere auf *supersoft* Skala). Solch ein Term ist $\lesssim g^5T^2$. In Termen, welche mindestens zwei σ -Propagatoren enthalten, können beide *loop*-Impulse auf σ skaliert werden. Diese Terme besitzen die Größenordnung g^4T^2 .

Eine Maximalabschätzung von Größenordnungen zeigt also, daß in $\mathcal{O}(g^4T^2)$ nur solche Terme zu berücksichtigen sind, in denen beide *loop*-Impulse gleich skaliert werden können.

In $\Pi_t^{\ominus hh}$ sind alle Linien nackt. Eine Beschränkung der Integrale auf den *hard*-Bereich sollte im Limes $Q_0 = 0$ und $q \rightarrow 0$ nicht notwendig sein, da 2PI-Diagramme trotz nackter Linien keine IR-Divergenzen aufweisen. $\Pi_t^{\ominus hh}$ ist also (3.57), jedoch mit nackten Gluon-Linien G_0 anstelle der vollen G . In $\mathcal{O}(g^4T^2)$ bleiben von (3.57) folgende Beiträge:

$$\Pi_t^\ominus(q) = \Pi_t^{\ominus hh}(q) + \Pi_{t(-)_h}^{\ominus ss}(q) + \Pi_{t(-)_h}^{\ominus 3D} . \quad (3.58)$$

Der letzte Term ist der 3D-Anteil des betrachteten Diagramms abzüglich der *hard-hard*-Beiträge. Es ist anzunehmen, daß die abgezogenen *hard-hard*-Beiträge lediglich der Regularisierung dienen und ähnlich wie in §3.2.1 mittels einer Identität in Regulatorterme mit Regulatormasse $M \gg \tau$ bzw. σ umgeschrieben werden können. $\Pi_{t(-)_h}^{\ominus 3D}$ wäre dann der regularisierte 3D-Anteil des betrachteten Diagramms.

Der mittlere Term von (3.58) (der *soft-soft*-Beitrag) ist wegen Subtraktion des *hard-hard*-Beitrages ebenfalls UV-konvergent. In führender Ordnung, d.h. $\mathcal{O}(g^4 T^2)$, kann τ vernachlässigt werden. Er bekommt damit die Gestalt

$$\begin{aligned} \Pi_{t(-)_h}^{\ominus ss}(q) = & \frac{3}{4} g^4 N^2 T^2 \int_k^3 \int_p^3 \frac{1}{k^2 + \sigma^2} \frac{1}{(\vec{k} - \vec{p})^2 + \sigma^2} \\ & \cdot \left\{ \frac{-2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} + (\alpha - 1) \frac{-p^2}{(\vec{p} - \vec{q})^4} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right. \\ & \left. - (\text{hard-hard-Anteil}) \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

und hat offensichtlich die Größenordnung $g^4 T^2$.

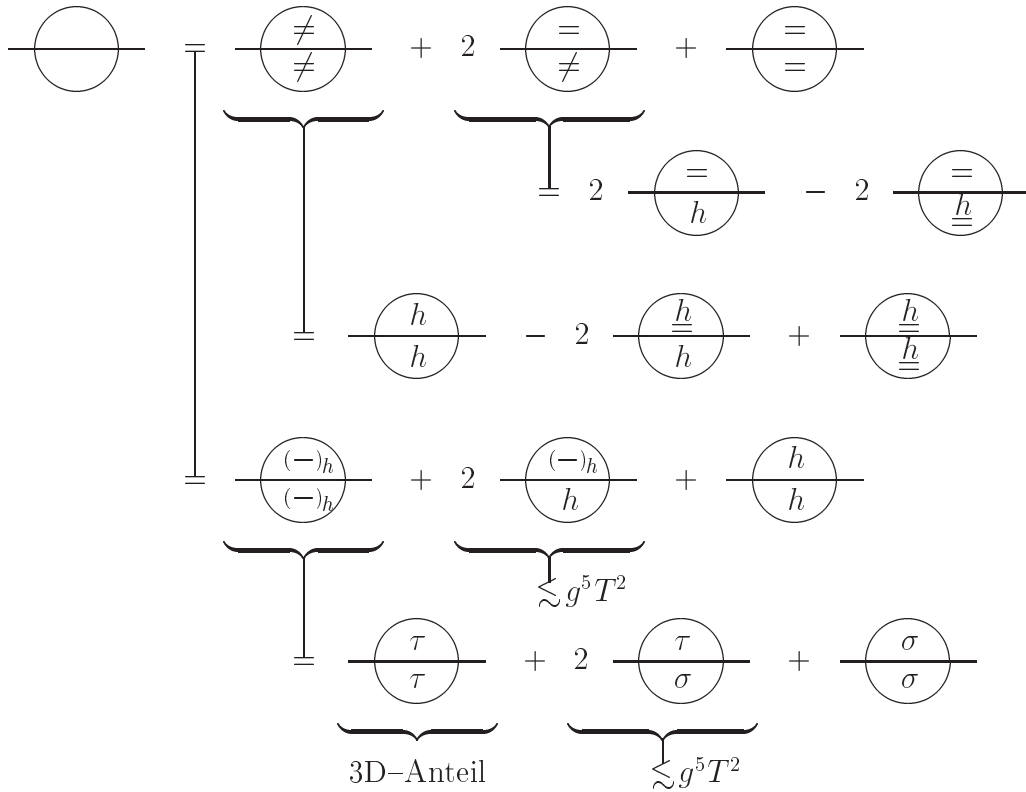


Abbildung 3.3: Die Zerlegung eines Beispiel-2PI-Diagramms, wie sie im Text erklärt ist.

1. Zeile: Aufteilung der *loop*-Integrationen in $K_0 \neq 0$ und $K_0 = 0$ bzw. $P_0 \neq 0$ und $P_0 = 0$.
2. bis 4. Zeile: Abspaltung des *hard-hard*-Anteils. Jede *loop*-Integration ist regularisiert. Die Bezeichnung $(-)_h$ bedeutet die Subtraktion des *hard*-Anteils. Die *loop*-Integration ist auf die Null-Mode reduziert.
5. Zeile: Aufteilung des Propagators bei $K_0 = 0$ bzw. $P_0 = 0$ in den transversalen und longitudinalen Sektor.

Obige Analyse am Beispiel eines speziellen Diagramms kann mit allen 2PI-Diagrammen durchgeführt werden: Terme mit unterschiedlich skalierten *loop*-Impulsen liefern keinen Beitrag in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$. Dagegen sind Terme mit gleich skalierten *loop*-Impulsen $\sim g^4 T^2$. Die Summe aller *hard-hard* Terme verschwindet, wie Abschnitt 3.3 zeigte. Der regularisierte 3D-Anteil läßt sich im Prinzip abspalten. Es dürfte aber schwierig werden, den Regulator in Δ_M - bzw. Δ_σ -Termen explizit anzugeben. Wie bei den 2PR-Diagrammen bewirkt die Regularisierung der logarithmischen UV-Divergenzen eine logarithmische Abhängigkeit des Resultates von der Regulatormasse M bzw. σ . Diese Abhängigkeit muß im 3D-Resultat aller 2-*loop* Diagramme verschwinden. Ansonsten ließe sich der 3D-Anteil in regularisierter Form (unabhängig von der Regulatormasse) nicht abspalten.

Die analytischen Ausdrücke für die 2PI-Diagramme sind im Anhang D angegeben. Mit $K_0 = P_0 = 0$ und $\mathbf{B} = 0$ können daraus unverzüglich die Terme für die 2PI-Diagramme in 3D abgeleitet werden, jedoch ohne Regulatoren. Selbst wenn wir die Lorentz-Kontraktionen der sieben 2PI-Diagramme von MAPLE-Programmen ausführen lassen, die resultierenden Terme ebenfalls mit MAPLE zusammenfassen und vereinfachen, bleiben immer noch mehr als 1000 Terme übrig, welche einzeln auf UV-Divergenz untersucht werden müßten.

Aufgrund der genannten Schwierigkeiten können wir die Regulatoren für den 3D-Anteil der 2-*loop* Diagramme nicht gewinnen. Es ist nicht einmal sicher, ob überhaupt Regulatoren existieren. Im negativen Fall wäre eine Abspaltung des regularisierten und von der Regulatormasse unabhängigen 3D-Anteils nicht möglich. In diesem ungünstigsten der denkbaren Fälle würde die Behandlung des 3D-YM-Systems, wie von KKN durchgeführt, dem Linde-Problem nicht weiterhelfen.

Entgegen früherer Annahme gibt es außer dem regularisierten 3D-Anteil weitere Beiträge der Größenordnung $g^4 T^2$. Diese Δ_σ enthaltenen Terme sind keine Regulatoren für den 3D-Anteil. Im nächsten Unterabschnitt sind sie angegeben.

3.5.2 Nicht zum 3D-Anteil gehörende 2PI-Terme

Beiträge der Größenordnung $g^4 T^2$, welche nicht zum 3D-Anteil gehören (*soft-soft*-Beiträge), entstehen in Termen der 2PI-Diagramme mit mindestens zwei σ -Propagatoren für $K_0 = P_0 = 0$. Von der Vielzahl der Terme in Anhang D (D.17 bis D.23) kommen dafür nur jene in Frage, welche eine Spur über mindestens zwei Gluon-Propagatoren enthalten. Da σ die Skala beider *loop*-Impulse vorgibt, kann der *supersoft* äußere Impuls q in führender Ordnung ($g^4 T^2$) vernachlässigt werden. In bereits vereinfachter Form erhalten wir

$${}^2\Pi_{t(-)}^{2\text{PI}ss} = g^4 N^2 T^2 \int_k^3 \int_p^3 \left\{ \Delta_\sigma(x) \Delta_\sigma(k) \mathcal{X} + \Delta_\sigma(x) \Delta_\sigma^2(k) \mathcal{Y} + \Delta_\sigma^2(k) \Delta_\sigma^2(p) \mathcal{Z} - (\text{hard-hard-Anteil}) \right\}. \quad (3.60)$$

Hierin ist $x := |\vec{k} - \vec{p}|$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &\equiv -\frac{3}{4p^2}\text{Sp}\left(\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(Q)\right) + \alpha\frac{3}{4p^4}\left[P\mathbf{A}(Q)P\right] \\ &= -\frac{1}{p^2} - \alpha\frac{1}{2p^2} \quad ,\end{aligned}\tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &\equiv -\frac{8}{p^2}\left[K\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(Q)K\right] - \frac{4}{p^4}\left[K\mathbf{A}(P)K\right]\left[K\mathbf{A}(Q)P\right] \\ &\quad - \alpha\left(2\frac{\vec{k}\vec{p}}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right)\left(4\left[P\mathbf{A}(Q)P\right] + 2\left[K\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(Q)K\right]\right) \\ &= \frac{8}{3}\left(2\frac{k^2}{p^2} - \frac{k^2\vec{k}\vec{p}}{p^4}\right)\left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2}\right) \\ &\quad + \frac{4}{3}\alpha\left(-2 + 4\frac{\vec{k}\vec{p}}{p^2} - \left(\frac{k^2}{p^2} - 2\frac{k^2\vec{k}\vec{p}}{p^4}\right)\left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2}\right)\right) \quad ,\end{aligned}\tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &\equiv \frac{3}{2}\left[K\mathbf{A}(Q)P\right] - \frac{2}{x^2}\left[K\mathbf{A}(K-P)K\right] + \alpha\frac{(k^2-p^2)^2}{2x^2}\left[K\mathbf{A}(Q)P\right] \\ &= -\vec{k}\vec{p} - \frac{4k^2p^2\vec{k}\vec{p}}{3x^4}\left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2}\right) - \frac{4}{3}\alpha\frac{(k^2-p^2)^2\vec{k}\vec{p}}{x^4} \quad .\end{aligned}\tag{3.63}$$

Wie zuvor sorgt die Subtraktion des *hard-hard*-Anteils für UV-Konvergenz. In diesem dient q als IR-Regulator.

Die weitere Auswertung von (3.60) wird in dieser Arbeit leider nicht mehr erfolgen können.

3.6 Magnetische Masse

In den letzten Abschnitten konnte leider nicht gezeigt werden, daß die transversale Selbstenergie im statischen Limes und *supersoft* q mit der regularisierten Selbstenergie der 3D YM-Theorie identisch ist. Im Gegenteil, wir konnten in *2-loop* Ordnung einen Term $\sim g^4 T^2$ ausfindig machen, welcher nicht der 3D-Selbstenergie zugeordnet werden kann. Dieser Term liefert einen Beitrag zu der in (3.2) aufgeführten Größe ${}^2\Pi_t^{ss}$.

Da wir die Größe ${}^2\Pi_t^{ss}$ nicht vollständig ermittelt haben, können wir auch keine Aussage darüber treffen, ob sie verschwindet oder nicht. Wir können aber davon ausgehen (Abschnitte 4 und 5), daß ${}^2\Pi_t^{ss}$ in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ nicht von q abhängt und somit einen direkten Beitrag zur magnetischen Masse liefert. Wir bezeichnen diesen mit τ_*^2 . Für den Propagatorpol bekommen wir für $Q_0 = 0$ folglich die Relation

$$0 = q^2 + \Pi_t(Q_0 = 0, q) = q^2 + \tau_*^2 + \Pi_t^{3D, \text{reg.}}(q) \quad .\tag{3.64}$$

Es sei daran erinnert, daß Π_t nur vom Betrag des äußeren Impulses \vec{q} abhängt.

Die 3D-Selbstenergie läßt sich mittels Wick-Rotation in 2+1D übertragen: $\Pi^{3D}(q) \rightarrow \Pi^{2+1D}(K_0, k)$, wobei der Euklidische Impuls \vec{q} zum Minkowskischen Dreier-Impuls $K = (K_0, \vec{k})$ wird (\vec{k} ist zwei-komponentig und es gilt $-q^2 = K^2 = K_0^2 - k^2$). Die 2+1D YM-Theorie ist super-renormierbar [50]. Es werden Regulatoren benötigt, um endliche Massen zu erhalten. Die Größe Π^{2+1D} ist regularisiert. Auf die Indizierung „t“ und „reg.“ wird hier verzichtet. Nur die 4D transversale Selbstenergie hat ihr Äquivalent in der 3D-Theorie, die longitudinale Selbstenergie dagegen nicht. Die Bezeichnung „transversal“ macht in 3D also keinen Sinn mehr.

Die Temperatur in der 3+1D YM-Theorie geht in 2+1D in der Kopplung e auf: $e^2 = g^2 T$. Auch die temperaturlose 2+1D YM-Theorie kann diagrammatisch entwickelt werden. Der gesamte Diagrammsatz bildet den im ersten Kapitel, Abschnitt 1.6, erklärten „Linde-See“. Für die diagrammatische Entwicklung werden Propagatoren benötigt. In 2+1D (und $T = 0$) hat der volle Gluon-Propagator in kovarianter Eichung die Gestalt $G_{\mu\nu}^{2+1D}(K) = (g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) / (K^2 - \Pi^{2+1D}) + \alpha K_\mu K_\nu / K^4$. Der Pol liegt bei

$$K_0^2 = k^2 + \Pi^{2+1D}(K_0, k) \quad . \quad (3.65)$$

In (3.65) gibt K_0 die Energie und \vec{k} den Wellenvektor eines propagierenden Gluons an. Die Gleichung wird gelöst durch das Energiespektrum eines Ein-Gluon-Zustandes, welcher durch das Eichfeld A^a oder, äquivalent, durch den Strom J^a repräsentiert wird. Gluonen sind farbige Objekte. Dies führt zu einem Konflikt: Aus Analogiegründen zu 3+1D erwartet man bei $T = 0$ nämlich Farbeinschluß. Das bedeutet insbesondere, daß Ein-Gluon-Zustände ausgeschlossen sind. Das Energiespektrum beginnt mit „weißen“ gebundenen Gluon-Zuständen, den sogenannten *glue balls*. Bedeutet dies, daß die von KKN behandelte und im letzten Kapitel vorgestellte 2+1D YM-Theorie für die Lösung der Dispersionsrelation (3.65) nicht zu gebrauchen ist?

Die KKN-Theorie hat das Ziel, die funktionale stationäre Schrödinger-Gleichung für den 2+1D Hamilton-Operator \mathbf{H} zu lösen. Mit dem Ansatz $\psi = e^P \psi_0$ für die Eigenzustände (ψ_0 ist Eigenfunktion zu \mathbf{H} für $\mathbf{V} = 0$) nimmt die Schrödinger-Gleichung die Gestalt $\tilde{\mathbf{H}} \psi_0 = E \psi_0$ an, wobei $\tilde{\mathbf{H}} := e^{-P} \mathbf{H} e^P$ ist (siehe Abschnitt 2.4.2). Sowohl $\tilde{\mathbf{H}}$ als auch ψ_0 sind Funktionale der Fourier-transformierten Felder $\tilde{I}^a(\vec{k}) = \frac{i}{2}(k_1 - ik_2) \tilde{J}^a(\vec{k})$, wobei $J^a(\vec{r})$ der Strom (2.36) ist. Die exakte Lösung der funktionalen Eigenwertgleichung $\tilde{\mathbf{H}} \psi_0 = E \psi_0$ ($\tilde{\mathbf{H}}$ aus (2.53)) kann nach Obigem jedoch nicht zur gesuchten Energie eines (physikalisch nicht existierenden) einzelnen Gluons führen. Ein möglicher Ausweg liegt darin, daß Störungsentwicklung und Wahrheit nicht übereinstimmen müssen. Die Frage ist dann jene nach der Grenze des störungstheoretischen Bereiches.

Ein einzelnes Gluon kann durch das Feld J^a eichinvariant definiert werden [44]. Entsprechend wird es im Impulsraum durch $\tilde{J}^a \sim \tilde{I}^a$ dargestellt. Wäre der Ein-Gluon-Zustand Eigenfunktion zu $\tilde{\mathbf{H}}$, dann müßte \tilde{I}^a die Schrödinger-Gleichung lösen. Für die folgende Analyse fordern wir, daß \tilde{I}^a Eigenfunktion ist. Wir setzen also \tilde{I}^a als Eigenfunktion in die Schrödinger-Gleichung mit $\tilde{\mathbf{H}}$ aus (2.53) ein und versuchen, die Energie

zu ermitteln :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}} \tilde{I}^a &= m \int d^2 k \left\{ \tilde{I}^a(\vec{k}) - 2\pi N k^2 \left(\delta_{\tilde{I}^a(-\vec{k})} P_{\bullet}[\tilde{I}] \right) \right. \\ &\quad \left. - 2i \int d^2 p F(\vec{k}, \vec{p}) f^{abc} \tilde{I}^c(\vec{k} + \vec{p}) \left(\delta_{\tilde{I}^b(\vec{p})} P_{\bullet}[\tilde{I}] \right) \right\} \\ &\stackrel{!}{=} E \tilde{I}^a \end{aligned} \quad (3.66)$$

Da es rechts vom Gleichheitszeichen (in der untersten Zeile) nur einen Term $\sim \tilde{I}^a$ gibt, können links von diesem Gleichheitszeichen nur solche Terme zur Energie beitragen, welche ebenfalls $\sim \tilde{I}^a$ sind. Das bedeutet insbesondere, daß der nicht-lineare f^{abc} -Term in (3.66) verschwinden muß. Auch das Funktional $P_{\bullet}[\tilde{I}]$ ist nun auf seinen in den Feldern \tilde{I}^a quadratischen Term reduziert. [42]: $P_{\bullet} \rightarrow P_{\text{quad.}}$.

Die Forderung nach einem Ein-Gluon-Eigenzustand führt also dazu, daß es den nicht-linearen Term (wir bezeichnen ihn mit $\mathbf{T}_{\text{nicht-lin.}}$) in $\tilde{\mathbf{H}}$ nicht geben darf. Anstelle von \mathbf{H} verwenden wir daher $\mathbf{H}_{\text{quad.}} := \mathbf{H} - \mathbf{T}_{\text{nicht-lin.}} =: \mathbf{T}_{\text{quad.}} + \mathbf{V}$. Entsprechend zu (2.52) ist

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}} = \tilde{\mathbf{T}}_{\text{quad.}} + \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{T}}_{\text{quad.}} \Big|_{\delta_{\tilde{I}^a} \rightarrow \delta_{\tilde{I}^a} + (\delta_{\tilde{I}^a} P_{\text{quad.}})} . \quad (3.67)$$

Aus Konsistenzgründen fordern wir die schon für $\tilde{\mathbf{H}}$ geltende Bedingung $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}} 1 = 0$. Aus dieser kann nun das Funktional $P_{\text{quad.}}[\tilde{I}]$ mittels eines in den Feldern \tilde{I}^a quadratischen Ansatzes ermittelt werden :

$$P_{\text{quad.}} = \int d^2 k \tilde{I}^a(\vec{k}) \alpha(k^2) \tilde{I}^a(-\vec{k}) \quad \text{mit} \quad \alpha(k^2) = \frac{m - \sqrt{m^2 + k^2}}{4\pi N m k^2} . \quad (3.68)$$

Da (3.68) die Bedingung $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}} 1 = 0$ erfüllt, sind in $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}}$ alle nicht-differenzierenden Terme beseitigt. $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}}$ reduziert sich damit auf

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}} = \int d^2 k \sqrt{m^2 + k^2} \tilde{I}^a(\vec{k}) \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} - \pi N m \int d^2 k k^2 \delta_{\tilde{I}^a(\vec{k})} \delta_{\tilde{I}^a(-\vec{k})} . \quad (3.69)$$

Wie (3.69) zeigt, wird das Wellenfunktional $\tilde{I}^a(\vec{k})$ die Eigenwert-Gleichung lösen. Die Eigenwert-Gleichung für den Ein-Gluon-Zustand lautet also

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{quad.}} \tilde{J}^a(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + k^2} \tilde{J}^a(\vec{k}) \quad , \quad \vec{k} = (k_1, k_2) . \quad (3.70)$$

Im zweiten Kapitel, Abschnitt 2.4.2, hatten wir gesehen, daß \tilde{I}^a Eigenfunktion des kinetischen Energie-Operators \mathbf{T} ist. Der zugehörige Eigenwert m ist unendlichfach entartet. Durch Einbeziehung des Potentials \mathbf{V} wird diese Entartung aufgehoben. Wir betonen hier aber noch einmal, daß es sich bei dem Ein-Gluon-Zustand \tilde{I}^a um keinen physikalischen Zustand handelt. Der exakte Operator $\tilde{\mathbf{H}}$ dürfte nur „weiße“ Eigenzustände (*glue balls*) haben.

Ein Aufbrechen der Bindung zwischen den Gluonen erfordert aufgrund des Farbeinschlusses unendlich hohe Energie. Der Energie-Eigenwert eines hypotetisch existierenden einzelnen Gluons müßte demnach unendlich hoch sein. Dies könnte man vielleicht dadurch studieren, daß man sowohl das Wellenfunktional $\psi_0[\tilde{I}]$ als auch das Funktional $P[\tilde{I}]$ als Potenzreihe in \tilde{I} ansetzt und die Eigenwert-Gleichung $\tilde{\mathbf{H}} \psi_0 = E \psi_0$ Ordnung für Ordnung löst. Aufgrund des Ansatzes für ψ_0 und P gibt es nun auch einen nicht-linearen Term in ψ_0 . Dieser bewirkt dann vielleicht eine unendlich hohe Energie des Ein-Gluon-Zustandes.

Wir vermuten also, daß zur Präparierung des störungstheoretischen Bereiches der nicht-lineare Term weggelassen werden muß. Allerdings haben wir hierfür nur die zuvor angestellten Überlegungen, welche zur Eigenwert-Gleichung (3.66) führten, in der Hand.

Das aus (3.66) folgende Ein-Gluon-Spektrum ist $E \equiv K_0 = \sqrt{k^2 + m^2}$. Setzen wir dies in (3.65) ein, dann folgt

$$m^2 = \Pi^{2+1D}(K_0, k) \Big|_{K_0=\sqrt{m^2+k^2}}, \quad \text{mit} \quad m^2 \equiv \frac{e^2 N}{2\pi}. \quad (3.71)$$

In der störungstheoretisch behandelten 2+1D-Theorie ist m^2 die Abschirmmasse.

Sollte sich nach Auswertung der 2PI-Diagramme in Abschnitt 3.5 herausstellen, daß keine Größe τ_*^2 existiert, dann würde m^2 via $e^2 = g^2 T$ auch die statische Dispersionsrelation (3.64) lösen. In diesem Fall wäre der Linde-See aufsummiert und m könnte mit der magnetischen Masse identifiziert werden.

Falls aber tatsächlich ein endlicher, nicht zur regularisierten 3D-Theorie gehörender Beitrag in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ existiert, dann würde die Abspaltung und separate Behandlung des 3D-Anteils zu einem Widerspruch führen: Die 3D-Dispersionsrelation wird durch $-q^2 = m^2$ gelöst, während in 3+1D $-q^2 = \tau_*^2 + m_*^2$ mit $m_*^2 := \Pi^{3D}(-q^2 = \tau_*^2 + m_*^2)$ die Lösung wäre. Die KKN-Masse m würde in diesem Fall an Bedeutung verlieren, es sei denn, die 3D-Selbstenergie ist in führender Ordnung ($g^4 T^2$) unabhängig vom Impuls q . Da auch τ_* als konstant angenommen werden kann, wäre die transversale Selbstenergie (zumindest im statischen Limes) unabhängig vom äußeren Impuls (auch die longitudinale Selbstenergie hängt in führender Ordnung ($g^2 T^2$) nicht vom äußeren Impuls ab).

Im Falle einer Impulsabhängigkeit wird $\Pi^{3D}(q)$ an der Stelle $-q^2 = \tau_*^2 + m^2$ voraussichtlich vom Eichfixierungsparameter α abhängen: Die transversale Selbstenergie ist auf der Dispersionskurve α -unabhängig [37]. Es ist davon auszugehen, daß dies auch für die 3D-Selbstenergie gilt, d.h. Π^{3D} ist bei $-q^2 = m^2$ α -unabhängig, wahrscheinlich aber nicht bei $-q^2 = \tau_*^2 + m_*^2$. Diese α -Abhängigkeit muß durch eine α -Abhängigkeit von τ_*^2 kompensiert werden.

Die oben aufgeworfenen Fragen müssen leider (aus Gründen der Komplexität der Strukturen) offen bleiben. Natürlich geben wir uns gern der Hoffnung hin, es möchte sich jener *soft-soft*-Zusatzterm aus §3.4.3 perfekt kompensieren, so daß kein τ_* existiert. Wenn sich zudem obige Vermutung zur Präparierung des störungstheoretischen Bereiches in 2+1D als richtig erweisen sollte, dann könnte man sagen, das Linde-Problem im statischen Limes der transversalen Selbstenergie sei gelöst. Die unendliche numerische Reihe wäre dann aufsummiert mit dem Resultat $m_{\text{mag}}^2 = e^2 N / (2\pi)$.

Kapitel 4

Der Druck des Gluon-Systems

In diesem Kapitel behandeln wir den Druck bzw. die Freie Energie des reinen Gluon-Systems bezogen auf die kritische Ordnung g^6 , in welcher der Linde-Mechanismus in Erscheinung tritt. Jedoch beschränken wir uns hier auf die $g^6 T^4$ -Beiträge der 1- und 2-loop Ordnung. Aus diesen versuchen wir jenen Anteil abzuspalten, welcher der regularisierten 3D-YM-Theorie zugeordnet werden kann. Generische g^6 -Beiträge entstehen erst in 4-loop Ordnung.

In den nächsten Abschnitten werden wir zunächst das bekannte Resultat für die Freie Energie bis $\mathcal{O}(g^3)$ reproduzieren, welches allein aus den 1- und 2-loop Diagrammen folgt. Anschließend separieren wir die g^6 -Beiträge nebst eines UV-Regulators.

4.1 Die Vorgeschichte

Die Störungsreihe der Freien Energie der Yang-Mills-Theorie hat die Form

$$F = VT^4 \left\{ c_0 + c_2 g^2 + c_3 g^3 + c'_4 g^4 \ln(g) + c_4 g^4 + c'_5 g^5 \ln(g) + c_5 g^5 + c'_6 g^6 \ln(g) + \mathcal{O}(g^6) \right\} . \quad (4.1)$$

Die führende Ordnung bekommt den Wert von $\eta := N^2 - 1$ Hohlraumstrahlungen. Die $\sim g^3$ -Korrektur wurde 1979 von Kapusta erhalten [5]. Toimela [51] gab 1983 den $g^4 \ln(g)$ -Term an. Erst 1994 konnten schließlich Arnold und Zhai durch Resummation der Störungsreihe den g^4 -Term ermitteln [14], wofür sie erstmalig auch die 3-loop Diagramme auswerten mußten. Ein Jahr später wurde dieses Ergebnis von Kastening und Zhai um die $g^5 \ln(g)$ - und g^5 -Terme erweitert [15], wobei sich der $g^5 \ln(g)$ -Term zu Null ergeben hat.

Bis zur Ordnung g^5 reichte es aus, die Störungsreihe mit der chromoelektrischen Masse (auch *debye screening mass* genannt) zu resumieren. Diese Abschirmmasse beseitigt die Infrarot-Divergenzen, welche ohne Resummation ab der dritten loop Ordnung auftreten würden. Es gibt in nicht-abelschen Eichtheorien jedoch eine weitere Quelle für IR-Divergenzen, hervorgerufen durch statische chromomagnetische Felder. Diese treten ab

$\mathcal{O}(g^6 T^4)$ in Erscheinung, sofern nicht auch der magnetische Sektor in der Störungsreihe resummiert wird. Die hierbei generierte magnetische Masse τ hat jedoch die Größenordnung $g^2 T$, was zu dem in Kapitel 1.6 beschriebenen Linde-Problem führt. Der g^6 -Term in (4.1) kann also störungstheoretisch nicht ermittelt werden.

Anders ist das beim $g^6 \ln(g)$ -Term. Dieser könnte im Prinzip erfaßt werden durch Auswertung der logarithmisch UV-divergenten Integrale in 4-*loop* Ordnung unter Verwendung dimensionaler Regularisierung, wie es zum Beispiel in [16] angedeutet wurde. Dennoch konnte dieser Term bislang nicht angegeben werden, was wohl auf die große Anzahl der Diagramme (siehe Abbildung 4.2) und der vier *loop*-Integrationen zurückzuführen ist.

Wir werden uns in diesem Kapitel mit jenen g^6 -Termen befassen, welche in 1- und 2-*loop* Ordnung enthalten sind. Wie zuvor gilt es, den Linde-See-Anteil, also jene Terme mit Null-Matsubara-Frequenz in allen *loops* (sowie Beschränkung der Propagatoren auf den transversalen Sektor), zu präparieren. Der 3D-Anteil der Summe aller Diagramme (der gesamte Linde-See also) ist eine physikalische Größe, nämlich die Grundzustandsenergie des 3D YM-Systems (sofern ohne Wechselwirkung auf Null normiert, handelt es sich um die Korrektur zur Grundzustandsenergie aufgrund der Kopplung $e = g\sqrt{T}$).

Die Freie Energie $F = E - TS$ wird bei $T \rightarrow 0$ also zur Grundzustandsenergie. Zur Zeit ist nicht klar, wie diese Größe aus der KKN-Theorie zu entnehmen ist. Wir nehmen hier jedoch an, daß dies möglich sei. Die g^6 -Ordnung der Freien Energie könnte dann im Prinzip ermittelt werden. Sie ist vollständig in $F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_{>3}^{\text{alle Imp. ss}}$ enthalten. Darin ist der letzte Term der >4 -*loop* Anteil der 3D Euklidischen Theorie. Die fehlenden 1-, 2-, 3- und 4-*loop* Anteile müssen aus F_0 bis F_3 separiert werden. Dabei sollten sich Regulatoren automatisch ergeben.

Alle nicht zu diesem räumlichen Anteil gehörenden Terme sind störungstheoretisch erfaßbar. Die hierfür benötigten Diagramme sind in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt, wobei in 3- und 4-*loop* Ordnung nur die zwei-Gluon-irreduziblen (2PI-) Diagramme angegeben sind. Die zwei-Gluon-reduziblen (2PR-) Diagramme ergeben sich durch Selbstenergie-Einsetzungen in Diagramme niedrigerer Ordnung. Zu den 2PI-Diagrammen in 3-*loop* Ordnung kommen noch 6 2PR-Diagramme und 5 Kreuzchen-Diagramme hinzu, zu jenen in 4-*loop* Ordnung 43 2PR-Diagramme und 30 Kreuzchen-Diagramme. Der vollständige Diagrammsatz in 3-*loop* Ordnung ist z.B. in [28] angegeben.

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1}{2} \text{ (Gluon loop) } + 1 \text{ (Ghost loop) } \\
 p_1 &= \frac{1}{12} \text{ (Gluon self-energy) } + \frac{1}{8} \text{ (Gluon exchange) } + \frac{1}{2} \text{ (Gluon tadpole) } + \frac{1}{2} \text{ (Gluon cross) }
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.1: Die 1- und 2-*loop* Diagramme des Druckes $p = -F/V$ einschließlich ihrer kombinatorischen Faktoren. Gluon-Propagatoren sind mit durchgezogenen Linien dargestellt, Geist-Propagatoren mit gepunkteten Linien. Das Kreuz im letzten Diagramm verweist auf Masseneinsetzungen \mathbf{Y} .

$$\begin{aligned}
p_2 = & \frac{1}{24} \text{Diagram 1} + \frac{1}{8} \text{Diagram 2} + \frac{1}{48} \text{Diagram 3} + \frac{1}{3} \text{Diagram 4} + \frac{1}{4} \text{Diagram 5} + \frac{1}{2} \text{Diagram 6} \\
p_3 = & \frac{1}{12} \text{Diagram 7} + \frac{1}{8} \text{Diagram 8} + \frac{1}{4} \text{Diagram 9} + \frac{1}{16} \text{Diagram 10} + \frac{1}{8} \text{Diagram 11} + \frac{1}{8} \text{Diagram 12} \\
& + \frac{1}{48} \text{Diagram 13} + \frac{1}{3} \text{Diagram 14} + \frac{1}{2} \text{Diagram 15} + \frac{1}{2} \text{Diagram 16} + \frac{1}{4} \text{Diagram 17} + 1 \text{Diagram 18} \\
& + 1 \text{Diagram 19} + 1 \text{Diagram 20} + \frac{1}{2} \text{Diagram 21} + \frac{1}{3} \text{Diagram 22} + \frac{1}{2} \text{Diagram 23} + \frac{1}{3} \text{Diagram 24} \\
& + \frac{1}{72} \text{Diagram 25} + \frac{1}{4} \text{Diagram 26} + \frac{1}{6} \text{Diagram 27}
\end{aligned}$$

Abbildung 4.2: Die 2PI-Diagramme in 3- und 4-loop Ordnung einschließlich ihrer kombinatorischen Faktoren. Die 2PR-Diagramme ergeben sich durch Selbstenergie-Einsetzungen in den Diagrammen niedrigerer Ordnung. Die drei Diagramme in der letzten Zeile sind nicht-planar. Sie verschwinden jedoch nach Farbsummation.

Ein Verfahren, wie sich die Diagramme mit samt ihrer kombinatorischen Faktoren in beliebiger *loop* Ordnung generieren, ist in [28] (dortiger Anhang A) angegeben. Die Komplexität der Kombinatorik (besonders ab 4-loop Ordnung) macht es praktisch unmöglich, das Verfahren per Hand durchzuführen. Umfangreiche MAPLE-Programme werden erforderlich. Mit deren Hilfe gelang es schließlich (scheinbar erstmalig) auch die kombinatorischen Faktoren der 4-loop Diagramme angeben zu können.

In [28] ist beschrieben, wie sich mit einem IR-Regulator $\mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) = \Pi^{\mu\nu}(P)$ in jeder *loop* Ordnung alle 2PR-Diagramme wegheben würden. Hier benutzen wir jedoch die im letzten Kapitel angegebene Methode (3.3), also jene mit konstanten Massen und auf die Null-Mode reduzierte. Diese hat zwar den Nachteil, daß sich keine Diagramme wegheben, aber den Vorteil, daß die analytische Behandelbarkeit der Beiträge einfacher wird [48].

Eine Möglichkeit, den störungstheoretischen vom nicht-störungstheoretischen Anteil zu separieren, bietet die dimensionale Reduktion [16]. Auch bei dieser Methode wird ein konstanter, auf die Null-Mode beschränkter IR-Regulator verwendet. Nur der longitudinale Sektor des Gluon-Propagators erhält eine Masse. Um den Linde-See zu erfassen, wird auf numerische Rechnungen am Gitter verwiesen, was für analytische theoretische Physiker leider etwas unbefriedigend ist. KKN [22] dagegen behandeln die 3D-Theorie analytisch. Es wäre daher ein gewaltiger Fortschritt, wenn die 3D-Grundzustandsenergie aus der KKN-Theorie ermittelt werden könnte. Im folgenden gehen wir hiervon aus. Die

Aufgabe ist also, in jeder *loop* Ordnung den rein räumlichen Anteil in regularisierter Form abzuspalten, wobei wir uns auf die 1- und 2-*loop* Ordnung beschränken werden.

4.2 1-loop Diagramme

Die 1-*loop* Diagramme sind in der ersten Zeile der Abbildung 4.1 zu finden. Diese Diagramme werden jedoch nicht von den Graphenregeln im Anhang B erfaßt. Die führende Ordnung F_0 der Freien Energie muß stattdessen explizit aus Z_0 durch Ausführen des Funktionalintegrals ermittelt werden. Die Herleitung von F_0 ist in [28] (dortiger Anhang C) angegeben. Das Resultat ist

$$F_0 = -\eta V \sum_P \ln \left(\frac{-r(P)}{P^2 - Y_t(P)} \sqrt{\frac{P^2}{P^2 - Y_\ell(P)}} \right) \quad (4.2)$$

mit $r(P) = T^2 e^{\beta|\vec{P}|} \delta_{P_0,0} - P_0^2$. Die Funktion $r(P)$ sorgt für den richtigen Wert von η Hohlraumstrahlungen bei $Y_{t,\ell} \rightarrow 0$, also $\lim_{Y_{t,\ell} \rightarrow 0} F_0 = -\frac{\pi^2}{45} \eta V T^4$.

Als IR-Regulator darf auch hier die Minimalform (3.3), d.h. $Y_t = \delta_{P_0,0} \tau^2$ und $Y_\ell = \delta_{P_0,0} \sigma^2$ gewählt werden [48]. Die Bezeichnungen σ und τ aus dem letzten Kapitel werden beibehalten. Es sei aber daran erinnert, daß $\sigma \equiv m_{\text{el}}$ (m_{el}^2 ist die führende Ordnung der longitudinalen Selbstenergie). τ , in (3.3) noch variabel und p -abhängig, wird trotz der Unsicherheiten im letzten Kapitel nun mit einer konstanten magnetischen Masse identifiziert.

Die Beschränkung der IR-Regularisierung auf die $P_0 = 0$ -Mode zwingt förmlich zur Abspaltung des nackten Anteiles ($Y_{t,\ell} = 0$) von F_0 : $F_0 = F_{0(0)} + F_{0(-)}$ mit $F_{0(-)} = F_0 - F_{0(0)}$. Für $F_{0(0)}$ erhalten wir dank der Funktion $r(P)$ den bekannten Wert für η Hohlraumstrahlungen,

$$F_{0(0)} = -\eta V \sum_P \ln \left(\frac{-r(P)}{P^2} \right) = -\frac{\pi^2}{45} \eta V T^4 \quad . \quad (4.3)$$

Mit $r(P)$ wird $F_{0(0)}$ überhaupt erst endlich und F_0 im ganzen ist lediglich noch linear divergent. $r(P)$ beseitigt also die schlimmste Divergenz ($\sim P^4$).

$F_{0(-)}$ besteht aus zwei linear divergenten Termen, welche für $P_0 \neq 0$ verschwinden :

$$F_{0(-)} = -\eta V T \int_p^3 \ln \left(\frac{p^2}{p^2 + \tau^2} \right) - \frac{1}{2} \eta V T \int_p^3 \ln \left(\frac{p^2}{p^2 + \sigma^2} \right) \quad . \quad (4.4)$$

Der erste dieser Terme ist die Definition für F_0^{3D} . In 3D übernimmt p^2 (im Zähler des Logarithmus) die Funktion von $r(P)$, beseitigt also die kubische Divergenz und sorgt für das richtige Verhalten von F_0^{3D} bei $\tau \rightarrow 0$, d.h. $\lim_{\tau \rightarrow 0} F_0^{3D} = 0$. Die Nichtexistenz einer 3D-Hohlraumstrahlung wird verständlich, wenn man bedenkt, daß es sich bei dem 3D-Anteil um eine $T = 0$ -Theorie handelt. Die lineare Divergenz in F_0^{3D} benötigt einen Regulator,

welcher, wie sich zeigen wird, genau durch den divergenten Anteil des „Kreuzchen-Termes“ gegeben ist.

Der Kreuzchen-Term F_{\times} ergibt sich mit den Graphenregeln (Anhang B) aus dem letzten Diagramm in der zweiten Zeile der Abbildung 4.1:

$$F_{\times} = \frac{1}{2} \eta V \sum_P \text{Sp}(\mathbf{Y}(P)G(P)) \quad . \quad (4.5)$$

Aufgrund der IR-Regularisierung (3.3) enthält dieser Term keine $P_0 \neq 0$ Anteile. Die thermische Summe \sum_P reduziert sich also auf $T \int_p^3$. Wir behandeln F_{\times} nun zusammen mit $F_{0(-)}$. Die Summe beider Terme ist

$$\begin{aligned} F_{0(-)} + F_{\times} &= -\eta VT \int_p^3 \left\{ \ln\left(\frac{p^2}{p^2 + \tau^2}\right) + \frac{\tau^2}{p^2 + \tau^2} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta VT \int_p^3 \left\{ \ln\left(\frac{p^2}{p^2 + \sigma^2}\right) + \frac{\sigma^2}{p^2 + \sigma^2} \right\} \\ &= \frac{\eta}{2\pi^2} VT \int_0^\infty dp \left(p^2 \ln\left(1 + \frac{\tau^2}{p^2}\right) - \tau^2 \right) + \frac{\eta}{2\pi^2} VT \tau^4 \int_p^\infty dp \frac{1}{p^2 + \tau^2} \\ &\quad + \frac{\eta}{4\pi^2} VT \int_0^\infty dp \left(p^2 \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{p^2}\right) - \sigma^2 \right) + \frac{\eta}{4\pi^2} VT \sigma^4 \int_0^\infty dp \frac{1}{p^2 + \sigma^2} \quad . \quad (4.6) \end{aligned}$$

In (4.6) sind alle Integrale endlich. Die Terme in der ersten bzw. dritten Zeile sind identisch mit jenen aus der 3D-Theorie. Die Summe von F_0^{3D} und F_{\times}^{3D} benötigt also tatsächlich keinen Regulator.

Das Ergebnis dieses Abschnittes ist

$$F_0 + F_{\times} = -\frac{\pi^2 \eta V}{45} T^4 - \frac{\eta V}{12\pi} \sigma^3 T - \frac{\eta V}{2} T \int_p^3 \sigma^2 (\Delta_\sigma(p) - \Delta_0(p)) + F_0^{3D} + F_{\times}^{3D} \quad (4.7)$$

mit

$$F_0^{3D} + F_{\times}^{3D} = \frac{\eta V}{12\pi} \tau^3 T \quad . \quad (4.8)$$

Keiner der Terme in (4.7) hängt von der Eichfixierung ab. Das Integral im dritten Term ist bewußt nicht ausgewertet worden. Es wird im nächsten Abschnitt (siehe (4.15)) mit einem Term aus 2-loop Ordnung kombiniert werden.

Wir betonen an dieser Stelle noch einmal, daß F_0^{3D} bei verschwindender Kopplung ebenfalls verschwinden muß, da in einer $T = 0$ -Theorie keine Hohlraumstrahlung mehr vorhanden ist. Dieser Umstand bewirkt außerdem, daß F_0^{3D} nicht kubisch, sondern lediglich linear divergiert. Erst die Summe von F_0^{3D} und F_{\times}^{3D} ist endlich.

4.3 2-loop Diagramme

Die drei 2-loop Diagramme sind in der zweiten Zeile der Abbildung 4.1 dargestellt. Die analytischen Ausdrücke für diese Diagramme ergeben sich durch Anwendung der in Anhang B angegebenen Graphenregeln. Nach Ausführung der Farbsummationen bekommen

wir für die Freie Energie in 1-*loop* Ordnung (ohne Kreuzchen-Diagramm) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
F_1 = & \frac{\eta V}{4} g^2 N \sum_{K,P} \left\{ \text{Sp}\left(G(K)\right) \text{Sp}\left(G(P)\right) - \text{Sp}\left(G(K)G(P)\right) \right. \\
& - 2 \left[(2P - K) G(K) G(K - P) G(P) (2K - P) \right] \\
& - \text{Sp}\left(G(K)G(P)\right) \left[(K + P) G(K - P) (K + P) \right] \\
& \left. + 2 \frac{1}{K^2 (K - P)^2} \left[K G(P) (K - P) \right] \right\} . \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Wie schon im letzten Kapitel (siehe (3.5)), nehmen wir auch hier die Aufteilung des Gluon-Propagators G in G_0 und G_- vor. Mit dieser Aufteilung lassen sich aus F_1 drei Teile bilden:

- 1) $F_{1(0)}$: Hierin sind alle Gluon-Linien nackt.
 - 2) $F_{1(i)}$: Alle Terme enthalten genau einen Gluon-Propagator G_- .
 - 3) $F_{1(ii)}$: Alle Terme enthalten mindestens zwei Gluon-Propagatoren G_- .
- (4.10)

Außerdem gilt $F_{1(-)} := F_1 - F_{1(0)} = F_{1(i)} + F_{1(ii)}$. Hierin sollte der 3D-Anteil der 2-*loop* Diagramme verborgen sein. Die Separation des selben nehmen wir im vierten Abschnitt vor.

4.3.1 Diagramme mit nackten Gluon-Propagatoren

Die Terme von $F_{1(0)}$ stellen die komplette g^2 -Ordnung dar. Jede Abhängigkeit vom Eichfixierungsparameter α muß herausfallen. Tatsächlich läßt sich nach einigen Umformungen zeigen, daß sich in $F_{1(0)}$ alle $(\alpha - 1)$, $(\alpha - 1)^2$ und $(\alpha - 1)^3$ Terme herauskürzen. Die α -unabhängigen Terme lassen sich vereinfachen zu

$$F_{1(0)} = \eta V g^2 N \sum_{K,P} \frac{1}{K^2 P^2} . \quad (4.11)$$

Die Auswertung des Summenintegrals $\sum_P \frac{1}{P^2}$ ist in [28] (dortiger Anhang F) vorgeführt. Ebenfalls in [28] ist nachzulesen, wie die quadratische Divergenz in dimensionaler Regularisierung beseitigt wird. Die Ausführung der Frequenzsumme mittels Kontourintegral liefert somit ein endliches Raumintegral, dessen Lösung bekannt ist: $\sum_P \frac{1}{P^2} = -4\pi \int_p^3 n(p)/p = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p n(p) = -\frac{T^2}{12}$. Damit folgt das bekannte Ergebnis in $\mathcal{O}(g^2)$,

$$F_{1(0)} = \frac{\eta V}{144} g^2 N T^4 . \quad (4.12)$$

4.3.2 Reproduktion des bekannten Resultates bis $\mathcal{O}(g^3)$

In $F_{1(i)}$ enthält jeder Term einen G_- -Propagator. Da dieser, wie aus (3.6) hervorgeht, nur in der Null-Mode existiert, reduziert sich eine der beiden *loop*-Integrationen in (4.9),

z.B. \sum_P , auf den räumlichen Anteil $T \int_p^3$:

$$\begin{aligned}
F_{1(i)} = & \frac{\eta V}{2} g^2 N \sum_K T \int_p^3 \left\{ \text{Sp} \left(G_0(K) \right) \text{Sp} \left(G_-(P) \right) - \text{Sp} \left(G_0(K) G_-(P) \right) \right. \\
& - 4 \left[(2P - K) G_0(K) G_0(K - P) G_-(P) K \right] \\
& + \left[(2P - K) G_0(K) G_-(P) G_0(K - P) (K + P) \right] \\
& - 2 \text{Sp} \left(G_0(K) G_0(K - P) \right) \left[K G_-(P) K \right] \\
& - \text{Sp} \left(G_0(K) G_-(P) \right) \left[(K + P) G_0(K - P) (K + P) \right] \\
& \left. + \frac{1}{K^2 (K - P)^2} \left[K G_-(P) K \right] \right\} . \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Hier wurde bereits berücksichtigt, daß G_- nur aus einem \mathbf{A} - und einem \mathbf{B} -Term besteht, weswegen $G_-(P)P = 0$ gilt. Der Impuls P ist der Einfachheit halber als 4er-Impuls angegeben. Die geschweifte Klammer in (4.13) ist dennoch nur für $P_0 = 0$ von Null verschieden (jeder der sieben Terme enthält $G_-(P)$ und verschwindet daher für $P_0 \neq 0$).

Wie weiteres Umformen von (4.13) zeigt, bilden die G_0 -Propagatoren die 1-loop Selbstenergie (3.8) mit nackten Linien, d.h. ${}^1\Pi_{(0)}$. Damit bekommt (4.13) die einfache Gestalt

$$\begin{aligned}
F_{1(i)} &= -\frac{\eta V}{2} T \int_p^3 \text{Sp} \left({}^1\Pi_{(0)}(P) G_-(P) \right) \\
&= \eta V T \int_p^3 {}^1\Pi_{t(0)}(p) (\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)) + \frac{\eta V}{2} T \int_p^3 {}^1\Pi_{\ell(0)}(p) (\Delta_\sigma(p) - \Delta_0(p)) . \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Bevor wir mit der Auswertung von $F_{1(ii)}$ beginnen, notieren wir zunächst das folgende Zwischenresultat, welches sich aus (4.7), (4.12) und (4.14) ergibt:

$$\begin{aligned}
F_0 + F_\times + F_1 &= -\frac{\pi^2 \eta V}{45} T^4 + \frac{\eta V}{144} g^2 N T^4 - \frac{\eta V}{12\pi} \sigma^3 T \\
&+ F_0^{3D} + F_\times^{3D} + F_{1(ii)} \\
&+ \frac{\eta V}{2} T \int_p^3 \left({}^1\Pi_{\ell(0)}(p) - \sigma^2 \right) (\Delta_\sigma(p) - \Delta_0(p)) \\
&+ \eta V T \int_p^3 {}^1\Pi_{t(0)}(p) (\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)) . \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Die ersten drei Terme stellen mit $\sigma^2 = \frac{1}{3} g^2 N T^2$ das bekannte Ergebnis [5] für die Freie Energie bis zur Ordnung $g^3 T^4$ dar. Wir bezeichnen diese Terme zusammenfassend mit $F^{\text{bis } g^3}$.

Wie (D.3) zeigt, bleibt ${}^1\Pi_{\ell(0)}(p)$ für $p \rightarrow \infty$ endlich. Das Integral in der dritten Zeile in (4.15) ist also endlich wobei p aufgrund der zweiten Klammer im *soft*-Bereich festgehalten wird. Für *soft* p ist die führende Ordnung von ${}^1\Pi_{\ell(0)}$ nach Definition unter (3.3) identisch

mit $\sigma^2 : {}^1\Pi_{\ell(0)}(p) - \sigma^2 =: \delta\Pi_{\ell(0)} \sim g^3 T^2$. Das Integral (wir bezeichnen es mit F_{Π_ℓ}) hat damit die Größenordnung $g^4 T^4$. In verkürzter Form lautet das Zwischenresultat (4.15) also

$$F_0 + F_\times + F_1 = F^{\text{bis } g^3} + F_{\Pi_\ell} + F_0^{3\text{D}} + F_\times^{3\text{D}} + F_{1(ii)} + F_{\Pi_t} \quad (4.16)$$

mit

$$F_{\Pi_t} := \eta V T \int_p^3 {}^1\Pi_{t(0)}(p) (\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)) \sim g^6 T^4 \quad (4.17)$$

und

$$F_{\Pi_\ell} := \frac{\eta V}{2} T \int_p^3 \delta\Pi_{\ell(0)}(p) (\Delta_\ell(p) - \Delta_0(p)) \sim g^4 T^4 \quad (4.18)$$

Auch $F_{1(ii)}$ trägt frühestens in $\mathcal{O}(g^4 T^4)$ bei, während $F_{\Pi_t} \sim g^6 T^4$ ist, wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird.

4.4 g^6 -Terme aus 1- und 2-loop Diagrammen

Die Aufgabe ist nun, aus den letzten beiden Termen von (4.16) den regularisierten 3D-Anteil $F_1^{3\text{D}, \text{reg.}}$ zu separieren. Zunächst notieren wir den Teil $F_{1(ii)}$. Da dieser in jedem Term zwei Propagatoren G_- mit verschiedenen Impulsen enthält, reduzieren sich beide *loop*-Integrationen auf ihren räumlichen Anteil. Der Einfachheit halber schreiben wir die Impulse K und P im Integranden weiter als 4er-Impulse. Zu beachten ist aber, daß der Integrand nur für $K_0 = P_0 = 0$ existiert.

$$\begin{aligned} F_{1(ii)} = \frac{\eta V}{4} g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \Big\{ & \text{Sp}\big(G_-(K)\big) \text{Sp}\big(G_-(P)\big) - \text{Sp}\big(G_-(K)G_-(P)\big) \\ & + 8 \big[(K+P)G_0(K-P)G_-(K)G_-(P)K \big] \\ & - \text{Sp}\big(G_0(K-P)G_-(K)\big) \big[KG_-(P)K \big] \\ & - 8 \big[KG_-(P)G(K-P)G_-(K)P \big] \\ & - \text{Sp}\big(G_-(K)G_-(P)\big) \big[(K+P)G(K-P)(K+P) \big] \Big\} . \quad (4.19) \end{aligned}$$

Für G_- ist (3.6) einzusetzen. Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{1(ii)} = \eta V g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \Big\{ & \big(\Delta_\tau(k) - \Delta_0(k)\big) \big(\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)\big) \mathcal{F}_{\tau\tau}(\vec{k}, \vec{p}) \\ & + \big(\Delta_\tau(k) - \Delta_0(k)\big) \big(\Delta_\sigma(p) - \Delta_0(p)\big) \mathcal{F}_{\tau\sigma}(\vec{k}, \vec{p}) \\ & + \big(\Delta_\sigma(k) - \Delta_0(k)\big) \big(\Delta_\sigma(p) - \Delta_0(p)\big) \mathcal{F}_{\sigma\sigma}(\vec{k}, \vec{p}) \Big\} . \quad (4.20) \end{aligned}$$

Um (4.20) in kompakter Form notieren zu könn Abkürzungen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\tau\tau} \equiv & 1 - \frac{1}{4} \text{Sp}(\mathbf{A}(K)\mathbf{A}(P)) - 2[P\mathbf{A}(K)\mathbf{A}(P)K]\Delta_0(x) + 4[P\mathbf{A}(K)P]\Delta_0(x) \\ & + 2[P\mathbf{A}(K)\mathbf{A}(K-P)\mathbf{A}(P)K]\Delta_\tau(x) + \text{Sp}(\mathbf{A}(K)\mathbf{A}(P)) [K\mathbf{A}(K-P)K]\Delta_\tau(x) \\ & + 2[P\mathbf{A}(K)P] [K\mathbf{A}(P)K]\Delta_0^2(x) - \frac{\alpha}{4} \text{Sp}(\mathbf{A}(K)\mathbf{A}(P)) (k^2 - p^2)^2 \Delta_0^2(x) \quad , \quad (4.21)\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{\tau\sigma} \equiv 1 + 2[P\mathbf{A}(K)P] \quad , \quad (4.22)$$

$$\mathcal{F}_{\sigma\sigma} \equiv [K\mathbf{A}(K-P)K]\Delta_\tau(x) - \frac{\alpha}{4} (k^2 - p^2)^2 \Delta_0^2(x) \quad (4.23)$$

mit $x := |\vec{k} - \vec{p}|$. Die Produkte mit den Matrizen \mathbf{A} sind im Anhang C angegeben. Sie sind nur für $K_0 = P_0 = 0$ von Null verschieden. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\tau\tau}(\vec{k}, \vec{p}) = & \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} - 4k^2\Delta_0(x) + k^2p^2\Delta_0^2(x) - k^4\Delta_0^2(x) \right) \left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2} \right) \\ & - \frac{1}{2}\Delta_\tau(x) \left(k^2 + 5k^2p^2\Delta_0(x) - k^4\Delta_0(x) \right) \left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2} \right) \\ & - \frac{\alpha}{4} (k^2 - p^2)^2 \Delta_0^2(x) \left(1 + \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2} \right) \quad , \quad (4.24)\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{\tau\sigma}(\vec{k}, \vec{p}) = 1 - 2p^2\Delta_0(x) \left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2} \right) \quad , \quad (4.25)$$

$$\mathcal{F}_{\sigma\sigma}(\vec{k}, \vec{p}) = -\Delta_\tau(x) k^2p^2\Delta_0(x) \left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2} \right) - \frac{\alpha}{4} (k^2 - p^2)^2 \Delta_0^2(x) \quad . \quad (4.26)$$

Die Ausdrücke (4.24), (4.25) und (4.26) setzen wir nun in (4.20) ein. Aufgrund der Differenzen in den runden Klammern können wir leicht verifizieren, daß in $F_{1(ii)}$ alle Terme endlich sind. Nur der erste von den drei Summanden in (4.20) hat die Größenordnung g^6T^4 . Er gehört vollständig zur 2-loop Ordnung der 3D-Theorie. Der zweite Summand ist $\sim g^5T^4$ und der dritte $\sim g^4T^4$.

Die 2-loop Ordnung in 3D ohne Regulatoren erhalten wir aus (4.9) für $K_0 = P_0 = 0$ und $G = -\Delta_\tau\mathbf{A} - \alpha\Delta_0\mathbf{D}$. Sie unterscheidet sich von dem 3D-Anteil in (4.20) durch drei divergente Terme :

$$\begin{aligned}F_1^{3D} = & \eta V g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \left\{ \left(\Delta_\tau(k) - \Delta_0(k) \right) \left(\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p) \right) \mathcal{F}_{\tau\tau}(\vec{k}, \vec{p}) \right. \\ & \left. - \Delta_0(k) \left(\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p) \right) + \left(1 - \frac{(\vec{k}\vec{p})^2}{k^2p^2} \right) \Delta_0(x) \Delta_\tau(p) \right\} \\ & + \eta V T \int_p^3 {}^1\Pi_{t(0)}^{3D}(p) \left(\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p) \right) \quad . \quad (4.27)\end{aligned}$$

Nur der erste Term in (4.27) ist endlich. Er ist in (4.20) enthalten. Im zweiten Term divergiert das k -Integral. Er läßt sich in (4.20) samt eines Regulators erzeugen, wenn wir die aus (3.17) folgende Identität

$$0 = -\eta V g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \Delta_0(k) (\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)) + 3\mathcal{R}_1^{(1)} \quad (4.28)$$

addieren. Der Regulator ist

$$\mathcal{R}_1^{(1)} := \eta V g^2 T^2 \int_k^3 \int_p^3 \left(\Delta_\sigma(k) - \frac{2}{3} k^2 \Delta_\sigma^2(k) \right) (\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)) \quad , \quad (4.29)$$

wobei als Regulatormasse $M^2 = \sigma^2$ gewählt wurde. In regularisierter Form verschwindet der zweite Term in (4.27) also.

Der dritte Term in (4.27) ist problematischer, da sich die Integrale nicht faktorisieren lassen. Zunächst erzeugen wir ihn mittels der Identität

$$0 = \eta V g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{p})^2}{k^2 p^2} \right) \Delta_0(x) \Delta_\tau(p) - 2\mathcal{R}_1^{(1)} - 6\mathcal{R}_1^{(2)} + \mathcal{R}_1^* \quad . \quad (4.30)$$

Darin ist

$$\mathcal{R}_1^{(2)} := \eta V g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \left(\Delta_\sigma(k) - \frac{2}{3} k^2 \Delta_\sigma^2(k) \right) \left(\Delta_\sigma(p) - \frac{2}{3} p^2 \Delta_\sigma^2(p) \right) \quad (4.31)$$

ein aus (3.17) folgender Regulator, sowohl für das k - als auch für das p -Integral. Ein weiterer, zur Regularisierung benötigter Term ist

$$\mathcal{R}_1^* := \eta V g^2 N T^2 \int_k^3 \int_p^3 \left(\frac{2}{3} \Delta_0(k) - \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{p})^2}{k^2 p^2} \right) \Delta_0(x) \right) \Delta_\tau(p) \quad . \quad (4.32)$$

Hierin konvergiert das k -Integral, während das p -Integral quadratisch divergent ist. Separiert man die quadratische Divergenz, so bleibt eine logarithmische Divergenz übrig :

$$\int_k^3 \left(\frac{2}{3} \Delta_0(k) - \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{p})^2}{k^2 p^2} \right) \Delta_0(x) \right) = \frac{p}{32} \quad , \quad (4.33)$$

$$\mathcal{R}_1^* = \frac{\eta V}{32} g^2 N T^2 \int_p^\infty p \Delta_\tau(p) = \frac{\eta V}{64\pi^2} g^2 N T^2 \left(\int_0^\infty dp p - \tau^2 \int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + \tau^2} \right) \quad . \quad (4.34)$$

Für beide Terme, den quadratisch divergenten und den logarithmisch divergenten, läßt sich keine Identität finden. Letzterer ist zudem dimensionsbehaftet und bereitet damit die im letzten Kapitel, Abschnitt 3.4, genannten Schwierigkeiten.

Sowohl $\mathcal{R}_1^{(1)}$ und $\mathcal{R}_1^{(2)}$ als auch \mathcal{R}_1^* werden zur Regularisierung von F_1^{3D} benötigt. Im Gegensatz zu $\mathcal{R}_1^{(1)}$ und $\mathcal{R}_1^{(2)}$ ist \mathcal{R}_1^* kein „echter“ Regulator, da er keine Regulatormasse M bzw. σ enthält und folglich für $\sigma \rightarrow \infty$ nicht verschwindet. Es konnte keine Identität gefunden werden, mit Hilfe derer \mathcal{R}_1^* durch einen σ enthaltenden Regulator ersetzt werden

kann, ohne daß dabei logarithmische σ -Terme entstehen, welche bei $\sigma \rightarrow \infty$ divergieren würden. In der gesamten 3D-Störungsreihe sollten sich aber alle (in einzelnen Termen auftretenden) quadratischen und logarithmischen Divergenzen wegheben. Dann bliebe auch von \mathcal{R}_1^* allenfalls ein endlicher Rest, welcher nicht zur 3D-Theorie gehört. Wenn dagegen in der Summe aller 3D-Diagramme quadratische oder logarithmische Divergenzen übrig bleiben würden, dann wäre im schlimmsten Fall eine Abspaltung des 3D-Anteils der Freien Energie in regularisierter Form nicht möglich.

Wir kommen nun zum letzten Term in (4.27). Dieser enthält die 1-loop 3D-Selbstenergie mit nackten Linien und ist der 3D-Anteil von F_{Π_t} in (4.16), weswegen wir ihn entsprechend mit F_{Π}^{3D} bezeichnen. Wäre die p -Integration auf Impulse $\sim \tau$ beschränkt, dann könnten wir die aus Abschnitt 3.2.1 bekannte Beziehung ${}^1\Pi_{t(0)} = {}^1\Pi_{t(0)}^{3D, \text{reg.}}$ einsetzen und hätten sofort einen Regulator gefunden. Doch für $p \rightarrow \infty$ divergiert das p -Integral in F_{Π}^{3D} logarithmisch. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß diese logarithmische Divergenz durch Terme aus 3-loop Ordnung beseitigt wird (auch die logarithmischen Divergenzen in F_0^{3D} und F_{\times}^{3D} heben sich in der Summe beider Terme weg, siehe (4.6)). Um einen endlichen Ausdruck aufschreiben zu können, führen wir formell den Regulator \mathcal{R}_{Π} ein, welcher bei Hinzunahme der genannten Terme wieder verschwindet.

$$\begin{aligned} F_{\Pi_t} &= \eta VT \int_p^3 {}^1\Pi_{t(0)}^{3D, \text{reg.}}(p) (\Delta_{\tau}(p) - \Delta_0(p)) + \mathcal{R}_{\Pi} \\ &= \eta VT \int_p^3 {}^1\Pi_{t(0)}^{3D}(p) (\Delta_{\tau}(p) - \Delta_0(p)) - 2\mathcal{R}_1^{(1)} + \mathcal{R}_{\Pi} \quad . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aus den Ergebnissen dieses und des letzten Abschnittes erhalten wir für die Freie Energie bis 2-loop Ordnung das vorläufige Resultat

$$\begin{aligned} F_0 + F_{\times} + F_1 &= F^{\text{bis}g^3} + F_1^{g^4} + F_1^{g^5} + F_{\Pi_t}^{g^6} \\ &\quad + (F_0^{3D} + F_{\times}^{3D}) + (F_1^{3D} + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_1^* + \mathcal{R}_{\Pi}) \quad . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Darin ist $\mathcal{R}_1 := -\mathcal{R}_1^{(1)} - 6\mathcal{R}_1^{(2)}$ der Regulator für die linearen Divergenzen in F_1^{3D} . Die Summe $F_0^{3D} + F_{\times}^{3D}$ benötigt keinen Regulator. In $F_1^{g^4}$ und $F_1^{g^5}$ sind alle 2-loop g^4 - bzw. g^5 -Terme enthalten.

Es sollte nicht davon ausgegangen werden, daß zu $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ nur der 3D-Anteil von (4.36) beisteuert. Auch F_{Π_t} oder \mathcal{R}_1^* könnten endliche Terme $\sim g^6 T^4$ (erstere sind in (4.36) mit $F_{\Pi_t}^{g^6}$ bezeichnet) produzieren. Diese explizit anzugeben war jedoch nicht das Ziel dieses Kapitels. Es galt lediglich den 3D-Anteil der 1- und 2-loop Diagramme zu separieren. Daß es neben dem 3D-Anteil noch weitere g^6 -Beiträge geben könnte, schadet (anders als bei der transversalen Gluon-Selbstenergie) nicht der Philosophie. Natürlich ist aber nicht ausgeschlossen, daß sich etwaige g^6 -Beiträge, welche nicht der 3D-Theorie zugeordnet werden können, gegen g^6 -Terme aus höheren loop Ordnungen wegheben.

Im letzten Abschnitt konnten wir recht einfach $F^{\text{bis}g^3}$ angeben. Um die Freie Energie bis zur bekannten Ordnung $g^5 T^4$ zu reproduzieren, müßten die 3-loop Diagramme in führender und nächst-führender Ordnung ausgewertet werden. Aber auch hier gilt unser Interesse dem 3D-Anteil und dessen Regulatoren.

4.5 Ausblick zu 3- und 4-loop Diagrammen

Die 3- und 4-loop 2PI-Diagramme sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Die 2PR-Diagramme, welche dort nicht angegeben sind, entstehen durch Selbstenergie- bzw. Kreuzchen-Einsetzungen in Diagramme niedrigerer Ordnung. Im Falle der 3-loop Diagramme lassen sich die 2PR-Diagramme einfach zusammenfassen zu

$$\frac{1}{4} \text{ (diagram with two vertices and a loop) } + \frac{1}{2} \text{ (diagram with one vertex and a loop with a cross) } + \frac{1}{4} \text{ (diagram with two vertices and a loop with a cross) } \quad (4.37)$$

mit

$$\text{diagram with one vertex and a loop} = \frac{1}{2} \text{ (diagram with one vertex and a loop) } + \frac{1}{2} \text{ (diagram with one vertex and a loop with a cross) } + 1 \text{ (diagram with one vertex and a dashed loop) } \quad (4.38)$$

(4.38) ist die 1-loop Selbstenergie (3.8), mit welcher sich der 2PR-Anteil der Freien Energie in 3-loop Ordnung in recht einfache Gestalt bringen läßt:

$$F_2^{2\text{PR}} = -\frac{\eta V}{4} \sum_P \text{Sp} \left(G(P) ({}^1\Pi(P) - \mathbf{Y}(P)) G(P) ({}^1\Pi(P) - \mathbf{Y}(P)) \right) \quad (4.39)$$

Der IR-Regulator ist nur für $P_0 = 0$ von Null verschieden. In diesem Fall beseitigt \mathbf{Y} die führende Ordnung der 1-loop-Einsetzung ${}^1\Pi$, so daß ${}^1\Pi - \mathbf{Y} \sim g^3 T^2$ ist, (3.3). Die 3-loop 2PR-Diagramme sind daher nicht ordnungsreduzierend [30].

Wie schon bei den 2PR-Diagrammen der Gluon-Selbstenergie (Abschnitt 3.4) erweist es sich auch hier als sinnvoll, den 2PR-loop in $P_0 = 0$ und $P_0 \neq 0$ aufzuspalten: $\sum_P = \sum'_P + T \int_p^3$

$$\begin{aligned} F_2^{2\text{PR}} = & -\frac{\eta V}{4} \sum'_P \text{Sp} \left(G_0(P) {}^1\Pi(P) G_0(P) {}^1\Pi(P) \right) - \frac{\eta V}{4} T \int_p^3 \Delta_\sigma^2(p) \left({}^1\Pi_\ell(p) - \sigma^2 \right)^2 \\ & - \frac{\eta V}{2} T \int_p^3 \Delta_\tau^2(p) \left({}^1\Pi_t(p) - \tau^2 \right)^2 - \alpha^2 \frac{\eta V}{4} T \int_p^3 \Delta_0^2(p) \left({}^1\Pi_d(p) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

(der Strich an \sum_P steht für $P_0 \neq 0$). Soll der Druck lediglich bis $\mathcal{O}(g^4 T^4)$ angegeben werden, dann muß nur der erste Term berücksichtigt werden. Der zweite Term trägt wegen ${}^1\Pi - \sigma^2 \sim g^3 T^2$ erst in $\mathcal{O}(g^5 T^4)$ bei. Der 3D-Anteil von $F_2^{2\text{PR}}$ ist in den beiden Termen der zweiten Zeile enthalten.

Die α -Abhängigkeit in (4.40) werden wir nicht weiter untersuchen. Es ist davon auszugehen, daß sich die α -Terme im 3D-Anteil nicht aufheben werden. Der gesamte Linde-See muß aber (da eine physikalische Größe) α -unabhängig sein. Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß die 1-loop-Einsetzung ${}^1\Pi_t(p)$ für *supersoft* p bereits den Regulator für den 3D-Anteil enthält: ${}^1\Pi_t = {}^1\Pi_t^{3\text{D,reg}}$. Mit einem Regulator für das p -Integral muß dafür gesorgt werden, daß p im *supersoft*-Bereich festgehalten wird. Diesen Regulator bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_{2,p}^{2\text{PR}}$. Er sollte (bei Ausweitung der Frequenzsumme auch auf $P_0 = 0$) in den ersten beiden Termen von (4.40) verborgen sein.

$$F_2^{2\text{PR}, 3\text{D,reg.}} = -\frac{\eta V}{2} T \int_p^3 \left\{ \Delta_\tau^2(p) \left({}^1\Pi_t(p) - \tau^2 \right)^2 + \mathcal{R}_{2,p}^{2\text{PR}} + (\alpha\text{-Terme}) \right\} \quad (4.41)$$

Zusammen mit F_{Π_t} aus (4.35) bekommen wir

$$\begin{aligned} (F_{\Pi_t} + F_2^{2\text{PR}})^{3\text{D,reg.}} = & -\eta VT \int_p^3 \left\{ \frac{1}{2} \tau^4 \Delta_\tau^2(p) - \tau^2 {}^1\Pi_{t(-)}(p) \Delta_\tau^2(p) \right. \\ & - \tau^2 {}^1\Pi_{t(0)}(p) \Delta_\tau(p) (\Delta_\tau(p) - \Delta_0(p)) \\ & \left. + \frac{1}{2} ({}^1\Pi_t(p))^2 (\Delta_\tau^2(p) + \mathfrak{R}_p) + (\alpha\text{-Terme}) \right\}. \quad (4.42) \end{aligned}$$

Der erste Term benötigt keinen Regulator. Im zweiten Term ist ${}^1\Pi_{t(-)}$ (Abschnitt 3.2) endlich. In Analogie zu ${}^1\Pi_{\ell(-)}$ nehmen wir an, daß ${}^1\Pi_{t(-)}(p)$ für $p \rightarrow \infty$ endlich bleibt. Dann benötigt auch der zweite Term keinen Regulator. Im dritten Term, welcher den Ausdruck F_{Π_t} enthält, kann ${}^1\Pi_{t(0)}$ durch ${}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}}$ ersetzt werden. Aufgrund der Differenz in der runden Klammer wird der *loop*-Impuls p trotz der linearen p -Abhängigkeit von ${}^1\Pi_{t(0)}^{3\text{D,reg.}}(p)$ (siehe Anhang D) im *supersoft*-Bereich festgehalten. Der in (4.35) eingeführte Regulator \mathcal{R}_{Π} wird nicht mehr benötigt. Im vierten Term sorgt der Regulator \mathfrak{R}_p für Konvergenz des p -Integrals, so daß auch hier das Resultat aus Abschnitt 3.2 verwendet werden kann: ${}^1\Pi_t = {}^1\Pi_t^{3\text{D,reg.}}$. Den Regulator \mathfrak{R}_p können wir leider nicht angeben. Es wäre wünschenswert, daß er sich aus der 4D-Theorie automatisch ergibt.

Wesentlich komplizierter erweisen sich die 2PI-Diagramme. Zunächst ist, wie in Abschnitt 4.3, eine Aufteilung der Gluon-Propagatoren G in G_0 und G_- vorzunehmen. Für die 3-*loop* 2PI-Diagramme lassen sich vier Teile bilden:

- 1) $F_{2(0)}$: Hierin sind alle Gluon-Linien nackt.
 - 2) $F_{2(i)}$: Alle Terme enthalten genau einen Gluon-Propagator G_- .
 - 3) $F_{2(ii)}$: Alle Terme enthalten genau zwei Gluon-Propagatoren G_- .
 - 4) $F_{2(iii)}$: Alle Terme enthalten mindestens drei Gluon-Propagatoren G_- .
- (4.43)

Für die Freie Energie bis einschließlich $\mathcal{O}(g^4 T^4)$ muß lediglich der erste Teil berücksichtigt werden. Die g^5 -Terme sind vollständig im zweiten Teil enthalten. Erst in $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ wird auch der dritte und vierte Teil benötigt. Bis auf den ersten liefern alle Teile g^6 -Beiträge und werden vermutlich Terme zum 3D-Anteil beisteuern.

Analog lassen sich die 4-*loop* Diagramme behandeln. Im Regulator für die 3D-2PR-Diagramme sollte jener für die transversale Selbstenergie enthalten sein. Im Unterschied zu (4.39) gibt es jetzt aber auch Diagramme mit 2-*loop* Selbstenergie-Einsetzungen, dessen 3D-Regulatoren wir im letzten Kapitel nicht angeben konnten.

Der generische Vorfaktor der 4-*loop* Diagramme ist $\sim g^6$. Aufgrund dessen liefert bereits jener Anteil, in welchem alle *loop*-Impulse *hard* sind, einen Beitrag zu $\mathcal{O}(g^6 T^4)$. Die geschickte Wahl der Massen in (3.3) bewirkt, daß alle anderen Anteile, mit Ausnahme des reinen 3D-Anteils und jenes Anteiles, in welchem alle inneren Impulse $\sim gT$ sind, bis einschließlich $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Um den störungstheoretischen Anteil der 4-*loop* Diagramme in $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ zu erhalten, reicht es also aus, die eben genannten Anteile (alle Impulse *hard*, alle Impulse *soft*) auszuwerten. Dies dürfte sich aber wegen der großen Anzahl der Diagramme und der vierfachen *loop*-Integration als schwierig erweisen. Der 3D-Anteil muß nicht-störungstheoretisch ermittelt werden.

Unsere im statischen Limes der transversalen Selbstenergie erprobte Methode kann zwanglos auch bei der Behandlung der Freien Energie verwendet werden. Den 3D-Anteil zu präparieren, sollte insgesamt möglich sein. Liegt einmal das exakte Resultat für denselben vor, dann wird es möglich und sinnvoll, sich um die Freie Energie in der bislang nicht berechenbaren Ordnung $g^6 T^4$ zu bemühen.

Zusammenfassung

Die Behandlung der Gluon-Wechselwirkung ist ein Beitrag zum Verstehen nicht-abelscher Feldtheorie, vielleicht sogar der wichtigste. Im Grenzfall extrem hoher Temperatur T wird die Kopplung klein ($g \ll 1$), und damit eine störungstheoretische Behandlung des Gluon-Systems möglich. Wie bereits 1980 von Linde vorhergesagt, führen jedoch chromomagnetische Effekte zu einer Berechenbarkeitsschwelle: Aufgrund der Größenordnung der thermisch generierten magnetischen Masse $m_{\text{mag}} \sim g^2 T$ entstehen unendlich viele Terme gleicher Ordnung, wodurch Störungsrechnung am Druck ab $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ und an der Gluon-Selbstenergie ab $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ unmöglich wird. Die aufzusummierende numerische Reihe ist in dem auf 3D reduzierten Anteil der Theorie enthalten, welcher kürzlich als 2+1D Yang-Mills-Theorie bei $T = 0$ von Karabali, Kim und Nair nicht-störungstheoretisch behandelt wurde. Nach 20 Jahren ist nun eine Möglichkeit eröffnet, die oben genannte Schwelle zu überwinden.

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, die nicht-störungstheoretischen Resultate für das Verständnis des 4D thermischen Yang-Mills-Systems zu nutzen. Insbesondere wird die Abspaltung des räumlichen Anteils der transversalen Selbstenergie im statischen Limes behandelt. Wie erwartet, kann das 3D-Untersystem aus der 4D-Struktur herausgetrennt werden und zwar als regularisierte 3D YM-Theorie. In 1-*loop* Ordnung werden die Regulatoren explizit erhalten. Das Arbeiten mit konstanten infrarot-regulierenden Massen hat sich dabei gut bewährt. Für die 2-*loop* Ordnung kann gezeigt werden, daß der generische Beitrag mit harten inneren Impulsen verschwindet. Wegen der sehr komplexen Strukturen der zwei-Gluon-irreduziblen Diagramme kann der 3D-Anteil und dessen Regularisierung im wesentlichen nur für die zwei-Gluon-reduziblen Diagramme untersucht werden. Ob die allgemeine Annahme, daß außer dem regularisierten 3D-Anteil keine weiteren Terme zur transversalen Selbstenergie im statischen Limes beitragen, richtig ist, bleibt damit leider offen.

Der letzte Teil dieser Arbeit befaßt sich mit dem Druck des Gluon-Systems. Hier entfällt von vornherein analytische Fortsetzung der diskreten Matsubara-Frequenzen. Die Untersuchungsmethode ist im wesentlichen jene der statischen Behandlung der Selbstenergie. In 1- und 2-*loop* Ordnung gelingt es, den 3D-Anteil abzuspalten und Regulatoren zu erhalten. Die Vorgehensweise bis zur generischen 4-*loop* Ordnung wird grob skizziert.

Es ist durchaus möglich, auch wenn vorerst noch Vermutungen benötigend, daß die Aufsummation der unendlichen Linde-Reihe bereits gelungen ist. Die thermische 4D-Diagrammatik kann mit exakten 3D-Resultaten kombiniert werden.

Anhang

Anhang A Ein typisches 1-loop-Integral

In diesem Anhang ermitteln wir explizit den Beitrag (3.10) zur 1-loop transversalen Selbstenergie im statischen Limes ($Q_0 = 0$, $q \sim g^2 T$),

$${}^1\Pi_{t(0)}^i(q) = g^2 N \sum_P \left\{ -2 \frac{1}{P^2} - 2 \frac{p^2}{P^2(P-Q)^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\} \Big|_{Q_0=0} . \quad (\text{A.1})$$

Die Frequenzsumme für die diskreten Werte $P_0 = i\omega_n$ werten wir mittels Übergang zum Kontourintegral aus (siehe [28], dortiger Anhang F):

$$\sum_{P_0} R(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\mathcal{C}} dz n(z) R(z) \right]_{\text{Re}(z) \neq 0} . \quad (\text{A.2})$$

Darin ist $n(z) = 1/(e^{\beta z} - 1)$ die Bose-Funktion. Die Kontour \mathcal{C} umschließt alle Pole der Funktion $R(z)$ im mathematisch positivem Sinn. Die Lösung des Integrals ist die Summe der Residuen von $n(z)R(z)$ in den singulären Punkten von $R(z)$. Da $p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right)$ bei Verschiebung $\vec{p} \rightarrow \vec{q} - \vec{p}$ unverändert bleibt und $n(-p) = -n(p) - 1$, erhalten wir für (A.1)

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(0)}^i(q) &= g^2 N \int_p^3 \left(\left\{ \frac{n(p)}{p} + 2p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \frac{n(p)}{p(p^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \right\} + \left\{ \quad \right\}_{p \rightarrow -p} \right) \\ &= g^2 N \int_p^3 \left(n(p) + \frac{1}{2} \right) \left\{ 2 \frac{1}{p} + 4 \frac{p}{p^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Die quadratischen Divergenzen im 1/2-Term heben sich weg. Der 1/2-Term ist lediglich logarithmisch UV-divergent mit einem Vorfaktor $g^2 q^2$. Sein divergenter Anteil muß sich in $\mathcal{O}(g^6 T^2)$ mit anderen logarithmisch divergenten Termen wegheben. In der uns interessierenden Ordnung $g^4 T^2$ kann der 1/2-Term somit vernachlässigt werden. Die Winkelintegration in (A.3) läßt sich auf zwei elementare Integrale zurückführen. In $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ ist

$${}^1\Pi_{t(0)}^i(q) = \frac{g^2 N}{4\pi^2} \int_0^\infty dp n(p) p \left\{ 2 + \left(\frac{2p}{q} - \frac{q}{2p} \right) \ln \left(\frac{|2p - q|}{2p + q} \right) \right\} . \quad (\text{A.4})$$

Hier ist es nun erlaubt, die Bose-Funktion $n(p)$ durch T/p zu ersetzen. Für $p \ll T$ gilt selbstverständlich $n(p) = T/p + \mathcal{O}(1)$. Für $p \sim T \gg q$ kann die geschweifte Klammer entwickelt werden und verschwindet in führender Ordnung: $p \{ \} = \mathcal{O}(q^2/p)$. Der Integralbeitrag für große p ist also vernachlässigbar, so daß ${}^1\Pi_{t(0)}^i \sim g^2 T \int_0^\infty dp \{ \}$. Nun läßt sich das Integral termweise mit Hilfe partieller Integration auswerten:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp \left\{ 2 + \frac{2p}{q} \ln \left(\frac{|2p-q|}{2p+q} \right) \right\} &= \int_0^\infty dp \left\{ 1 - \frac{p^2}{q} \left(\frac{2}{2p-q} - \frac{2}{2p+q} \right) \right\} \\ &= -q^2 \int_0^\infty dp \frac{1}{4p^2 - q^2} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} -\frac{q}{2} \int_0^\infty dp \frac{1}{p} \ln \left(\frac{|2p-q|}{2p+q} \right) &= \frac{q}{2} \int_0^\infty dp \ln(p) \left(\frac{2}{2p-q} - \frac{2}{2p+q} \right) \\ &= 2q^2 \int_0^\infty dp \frac{1}{4p^2 - q^2} \ln(p) = \frac{\pi^2}{4} q \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Also ist

$${}^1\Pi_{t(0)}^i(q) = \frac{q}{16} g^2 NT \quad . \quad (\text{A.7})$$

Behauptung: Der Ausdruck (A.1) ist in $\mathcal{O}(g^4 T^2)$ identisch mit (3.16), d.h.

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(0)}^i(q) &= g^2 NT \int_p^3 \left\{ \frac{4}{3} \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \right\} \\ &= \frac{g^2 NT}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \left\{ \frac{5}{3} - \frac{p^2}{q^2} - \left(\frac{p^3}{2q^3} - \frac{p}{q} + \frac{q}{2p} \right) \ln \left(\frac{|p-q|}{p+q} \right) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die Winkelintegration ist bereits ausgeführt. Das verbliebene 1D-Integral bearbeiten wir termweise. Mittels partieller Integration und (A.5), (A.6) folgt

$$\int_0^\infty dp \left\{ 2 + \frac{p}{q} \ln \left(\frac{|p-q|}{p+q} \right) \right\} = 0 \quad , \quad (\text{A.9})$$

$$- \int_0^\infty dp \frac{q}{2p} \ln \left(\frac{|p-q|}{p+q} \right) = \frac{\pi^2}{4} q \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty dp \left\{ \frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{3} + \frac{p^3}{2q^3} \ln \left(\frac{|p-q|}{p+q} \right) \right\} &= \int_0^\infty dp \left\{ \frac{p^4}{8q^3} \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q} \right) - \frac{p^2}{4q^2} - \frac{1}{4} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dp \left\{ \frac{p^2}{p^2 - q^2} - 1 \right\} \\ &= \frac{q^2}{4} \int_0^\infty dp \frac{1}{p^2 - q^2} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Damit ist die Behauptung erwiesen.

Anhang B YM–Graphenregeln

Die Graphenregeln für die Selbstenergie– und Druck–Diagramme der YM–Theorie [27]:

1. Zeichne alle topologisch verschiedenen zusammenhängenden Diagramme der n -ten Ordnung. Markiere Masseneinsetzungen durch Kreuze in den Linien.
2. Bestimme den kombinatorischen Faktor für jedes Diagramm.
3. Gebe jeder Linie einen Impuls P , so daß an den Vertizes Impulserhaltung gelte, schreibe für jede Gluon–Linie

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \xrightarrow{P} \begin{array}{c} b \\ \nu \end{array} \quad \hat{=} \quad \delta^{ab} G^{\mu\nu}(P) \quad (B.1)$$

und für jede Geist–Linie

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \cdots \xrightarrow{P} \cdots \begin{array}{c} b \\ \nu \end{array} \quad \hat{=} \quad \delta^{ab} \left(\frac{-1}{P^2} \right) \quad (B.2)$$

4. Setze für die Vertizes

$$\begin{array}{c} c \quad \mu \\ \uparrow P_3 \\ \begin{array}{ccc} P_1 & & P_2 \\ \swarrow & & \searrow \\ a & & b \end{array} \end{array} \quad \hat{=} \quad igf^{abc} P_2^\mu \quad , \quad (B.3)$$

$$\begin{array}{c} c \quad \mu_3 \\ \uparrow P_3 \\ \begin{array}{ccc} P_1 & & P_2 \\ \swarrow & & \searrow \\ a \quad \mu_1 & & b \quad \mu_2 \end{array} \end{array} \quad \hat{=} \quad igf^{abc} \left\{ \begin{array}{l} (P_1 - P_2)^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_2} \\ + (P_2 - P_3)^{\mu_1} g^{\mu_2 \mu_3} \\ + (P_3 - P_1)^{\mu_2} g^{\mu_3 \mu_1} \end{array} \right\} \quad , \quad (B.4)$$

$$\begin{array}{c} d \quad \mu_4 \quad \mu_3 \quad c \\ \swarrow P_4 \quad \searrow P_3 \\ \begin{array}{ccc} P_1 & & P_2 \\ \swarrow & & \searrow \\ a \quad \mu_1 & & b \quad \mu_2 \end{array} \end{array} \quad \hat{=} \quad -g^2 \left\{ \begin{array}{l} f^{eab} f^{ecd} (g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}) \\ + f^{eac} f^{edb} (g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_3 \mu_2} - g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4}) \\ + f^{ead} f^{ebc} (g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_4 \mu_3} - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_4 \mu_2}) \end{array} \right\} \quad , \quad (B.5)$$

für ein Kreuz in einer Gluon–Linie mit Impuls P setze

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \xrightarrow{P} \begin{array}{c} b \\ \nu \end{array} \quad \hat{=} \quad \delta^{ab} \left(-\mathbf{Y}^{\mu\nu}(P) \right) \quad (B.6)$$

5. Summiere mit \sum über alle Impulse.
6. Multipliziere mit (-1) für jeden Geist–loop.

Anhang C Lorentz–Matrix–Basis

Basis symmetrischer Lorentz–Matrizen :

$$\mathbf{A} = \mathbf{g} - \mathbf{B} - \mathbf{D} \quad , \quad \mathbf{B} = \frac{\tilde{P} \circ \tilde{P}}{-P^2} \quad , \quad \mathbf{C} = \frac{P \circ \tilde{P} + \tilde{P} \circ P}{-\sqrt{2} P^2} \quad , \quad \mathbf{D} = \frac{P \circ P}{P^2} \quad , \quad (\text{C.1})$$

mit $\tilde{P} = (p, P_0 \vec{p}/p)$.

Die wichtigsten Relationen zwischen den in dieser Arbeit verwendeten Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{D} sind :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(P)P &= \mathbf{A}(P)\tilde{P} = \mathbf{B}(P)P = \mathbf{D}(P)\tilde{P} = 0 \quad , \quad \mathbf{B}(P)\tilde{P} = \tilde{P} \quad , \quad \mathbf{D}(P)P = P \quad , \\ \mathbf{A}(P)\mathbf{B}(P) &= \mathbf{A}(P)\mathbf{D}(P) = \mathbf{B}(P)\mathbf{D}(P) = 0 \quad , \\ \mathbf{A}(P)\mathbf{A}(P) &= \mathbf{A}(P) \quad , \quad \mathbf{B}(P)\mathbf{B}(P) = \mathbf{B}(P) \quad , \quad \mathbf{D}(P)\mathbf{D}(P) = \mathbf{D}(P) \quad , \\ \text{Sp}(\mathbf{A}(P)\mathbf{B}(P)) &= \text{Sp}(\mathbf{A}(P)\mathbf{D}(P)) = \text{Sp}(\mathbf{B}(P)\mathbf{D}(P)) = 0 \quad , \\ \frac{1}{2}\text{Sp}(\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(P)) &= \text{Sp}(\mathbf{B}(P)\mathbf{B}(P)) = \text{Sp}(\mathbf{D}(P)\mathbf{D}(P)) = 1 \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Für $P_0 = Q_0 = 0$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\vec{p}) &= \mathbf{A}(P) = \frac{(0, \vec{p}) \circ (0, \vec{p})}{p^2} + \mathbf{g} - U \circ U \quad , \\ \mathbf{B}(\vec{p}) &= U \circ U \quad , \quad \mathbf{D}(\vec{p}) = -\frac{(0, \vec{p}) \circ (0, \vec{p})}{p^2} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

mit $U = (1, \vec{0})$. Daraus folgt

$$\mathbf{B}(P)Q \Big|_{P_0=Q_0=0} = 0 \quad , \quad \mathbf{B}(P)\mathbf{A}(Q) \Big|_{P_0=Q_0=0} = \mathbf{B}(P)\mathbf{D}(Q) \Big|_{P_0=Q_0=0} = 0 \quad . \quad (\text{C.4})$$

Mit diesen Relationen ist

$$\begin{aligned} [P\mathbf{A}(Q)P] &= -p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \quad , \\ [P\mathbf{A}(P-Q)P] &= -\frac{p^2 q^2}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \quad , \\ [P\mathbf{A}(Q)\mathbf{A}(P)Q] &= \vec{p}\vec{q} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \quad , \\ [P\mathbf{A}(Q)\mathbf{A}(P-Q)\mathbf{A}(P)Q] &= \vec{p}\vec{q} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - \frac{p^2 q^2}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right)^2 \quad , \\ [P\mathbf{A}(Q)\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(P-Q)Q] &= \frac{q^2 \vec{p}\vec{q}}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \quad , \\ \text{Sp}(\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(Q)) &= 2 - \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \quad , \\ \text{Sp}(\mathbf{A}(P)\mathbf{A}(P-Q)) &= 2 - \frac{q^2}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \left(1 - \frac{(\vec{p}\vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Anhang D 1– und 2–loop Selbstenergie–Diagramme

In diesem Anhang sind die analytischen Ausdrücke für die 1– und 2–loop Selbstenergie–Diagramme angegeben, wie sie sich aus den Graphenregeln im Anhang C ergeben. Die Farbsummationen sind bereits ausgeführt. Der Übersicht halber sind die 4er–Indizes in Matrix– und Vektorprodukten weggelassen.

1–loop Selbstenergie

$$\text{---}\bullet\text{---} = \frac{1}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} + \frac{1}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} + 1 \text{---}\bigcirc\text{---} = {}^1\Pi \quad ,$$

$$\begin{aligned} {}^1\Pi^{\mu\nu}(Q) = g^2 N \sum_P \Big\{ & G^{\mu\nu}(P) - \text{Sp}\big(G(P)\big) g^{\mu\nu} \\ & - 2 \Big((P - 2Q)G(P)G(P - Q) \Big)^\mu (2P - Q)^\nu \\ & + \Big((P - 2Q)G(P) \Big)^\mu \Big((P + Q)G(P - Q) \Big)^\nu \\ & + \frac{1}{2} \text{Sp}\big(G(P)G(P - Q)\big) (2P - Q)^\mu (2P - Q)^\nu \\ & + \Big[(P + Q)G(P - Q)(P + Q) \Big] G^{\mu\nu}(P) \\ & - \frac{1}{P^2(P - Q)^2} P^\mu (P + Q)^\nu \Big\} . \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Für nackte Gluon–Propagatoren und $Q_0 = 0$ ist die 1–loop transversale Selbstenergie ${}^1\Pi_{t(0)}(Q) = \frac{1}{2} \text{Sp}\big(\mathbf{A}(Q){}^1\Pi_{(0)}(Q)\big)$ durch

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(0)}(q) = g^2 N \sum_P \Big\{ & - 2 \frac{1}{P^2} - 2 \frac{p^2}{P^2(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) - 2 \frac{q^2}{P^2(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \\ & + (\alpha - 1) \left(\frac{q^2}{P^4} + \frac{q^2 p^2}{P^4(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) + \frac{q^4}{P^4(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \right) \\ & + (\alpha - 1)^2 \frac{-q^4 p^2}{4 P^4(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)^2} \left(1 - \frac{(\vec{p} \vec{q})^2}{p^2 q^2} \right) \Big\} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

gegeben und die 1–loop longitudinale Selbstenergie ${}^1\Pi_{\ell(0)}(Q) = \text{Sp}\big(\mathbf{B}(Q){}^1\Pi_{(0)}(Q)\big)$ durch

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{\ell(0)}(q) = g^2 N \sum_P \Big\{ & 2 \frac{1}{P^2} + 4 \frac{p^2}{P^2(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} - 2 \frac{q^2}{P^2(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \\ & + (\alpha - 1) \left(\frac{q^2}{P^4} - 2 \frac{q^2}{P^2(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} + \frac{-2 q^2 p^2 + q^4}{P^4(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} \right) \\ & + (\alpha - 1)^2 \left(\frac{q^4}{2 P^4(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)} + \frac{q^4 (\vec{p} - \vec{q})^2}{2 P^4(P_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2)^2} \right) \Big\} . \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Für *soft* q werten wir die Integrale in (D.2) und (D.3) bis einschließlich $\mathcal{O}(g^2 q T)$ aus. Die ersten beiden Terme in (D.2) wurden im Anhang A ermittelt: ${}^1\Pi_{t(0)}^i = g^2 NT q / 16$. Die Auswertung der ersten beiden Terme in (D.3) läßt sich auf Anhang A zurückführen: ${}^1\Pi_{\ell(0)}^i = m_{el}^2 = g^2 NT^2 / 3$. Alle anderen Terme enthalten q^2 im Zähler. Die thermische P -Summe kann daher in $\mathcal{O}(g^2 q T)$ auf die $P_0 = 0$ -Mode reduziert werden. In den Termen sind vier Winkelintegrationen zu unterscheiden:

$$\int_{-1}^{+1} d\cos(\vartheta) \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} = -\frac{1}{pq} \ln\left(\frac{|p - q|}{p + q}\right), \quad (\text{D.4})$$

$$\int_{-1}^{+1} d\cos(\vartheta) \frac{(\vec{p} \vec{q})^2 / (k^2 q^2)}{(\vec{p} - \vec{q})^2} = -\frac{1}{2q^2} - \frac{1}{2p^2} - \left(\frac{p}{4q^3} + \frac{1}{2pq} + \frac{q}{4p^3}\right) \ln\left(\frac{|p - q|}{p + q}\right), \quad (\text{D.5})$$

$$\int_{-1}^{+1} d\cos(\vartheta) \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^4} = \frac{2}{(p^2 - q^2)^2}, \quad (\text{D.6})$$

$$\int_{-1}^{+1} d\cos(\vartheta) \frac{(\vec{p} \vec{q})^2 / (k^2 q^2)}{(\vec{p} - \vec{q})^4} = \frac{1}{p^2 q^2} + \frac{2}{(p^2 - q^2)^2} + \left(\frac{1}{2pq^3} + \frac{1}{2p^3 q}\right) \ln\left(\frac{|p - q|}{p + q}\right). \quad (\text{D.7})$$

Unter Ausschluß der jeweils ersten beiden Terme erhalten wir aus (D.2) bzw. (D.3)

$$\begin{aligned} {}^1\Pi_{t(0)}(q) - {}^1\Pi_{t(0)}^i(q) &= \frac{g^2 NT}{4\pi^2} \left\{ 2\mathcal{I}_2 + (\alpha - 1) \left(\frac{3}{4}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_2 - \frac{1}{4}\mathcal{I}_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - 1)^2 \left(\frac{1}{8}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{8}\mathcal{I}_2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{und} \quad {}^1\Pi_{\ell(0)}(q) - m_{el}^2 = \frac{g^2 NT}{4\pi^2} \left\{ 2\mathcal{I}_2 + (\alpha - 1)\mathcal{I}_1 \right\}. \quad (\text{D.9})$$

Die hierin enthaltenen Integrale lauten

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\infty dp \left(2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q^3}{p^3} \ln\left(\frac{|p - q|}{p + q}\right) \right) = 0, \quad (\text{D.10})$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^\infty dp \frac{q}{p} \ln\left(\frac{|p - q|}{p + q}\right) = -\frac{\pi^2}{2} q, \quad (\text{D.11})$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^\infty dp \left(2 + \frac{p}{q} \ln\left(\frac{|p - q|}{p + q}\right) \right) = 0. \quad (\text{D.12})$$

Zusammen mit dem Ergebnis (A.7) erhalten wir

$${}^1\Pi_{t(0)}(q) = -\frac{1}{64} g^2 NT q (9 + 2\alpha + \alpha^2) \quad (\text{D.13})$$

$$\text{und} \quad {}^1\Pi_{\ell(0)}(q) = m_{el}^2 - \frac{1}{4} g^2 NT q \quad (\text{D.14})$$

mit $q \ll T$. Zu beachten ist, daß ${}^1\Pi_{t(0)}$ vom Eichfixierungsparameter α abhängt, während ${}^1\Pi_{\ell(0)}$ α -unabhängig ist.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---} &= \frac{3}{4} g^4 N^2 \sum_{K,P} \left\{ -2 \left[(K+P)G(K-Q)G(P-Q)(P+Q) \right] \left(G(K)G(P) \right)^{\mu\nu} \right. \\
&\quad + 2 \left((K+Q)G(K-Q)G(P) \right)^{\mu} \left((P+Q)G(P-Q)G(K) \right)^{\nu} \\
&\quad + 3 \left((K+Q)G(K-Q)G(P-Q)G(P)G(K) \right)^{\mu} (2P-Q)^{\nu} \\
&\quad \left. + \text{Sp} \left(G(K-Q)G(K)G(P-Q)G(P) \right) (2K-Q)^{\mu} (2P-Q)^{\nu} \right\} \\
&\hspace{15em} (\text{D.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{---}\bigoplus\text{---} &= \frac{1}{4} g^4 N^2 \sum_{K,P} \left\{ (K-2P+Q)^{\alpha} \left((P+Q)G(P-Q)G(K-P) \right)^{\beta} G^{\gamma\mu}(P) \right. \\
&\quad - \left[(2K-P-Q)G(P-Q)(P+Q) \right] G^{\alpha\beta}(K-P)G^{\gamma\mu}(P) \\
&\quad + \left((P+Q)G(P-Q) \right)^{\alpha} \left((K+P-2Q)G(K-P) \right)^{\beta} G^{\gamma\mu}(P) \\
&\quad - (K-2P+Q)^{\alpha} \left(G(K-P)G(P-Q)G(P) \right)^{\beta\gamma} (2P-Q)^{\mu} \\
&\quad + G^{\alpha\beta}(K-P) \left((2K-P-Q)G(P-Q)G(P) \right)^{\gamma} (2P-Q)^{\mu} \\
&\quad - \left(G(P-Q)G(P) \right)^{\alpha\gamma} \left((K+P-2Q)G(K-P) \right)^{\beta} (2P-Q)^{\mu} \\
&\quad + (K-2P+Q)^{\alpha} \left((P-2Q)G(P) \right)^{\gamma} \left(G(K-P)G(P-Q) \right)^{\beta\mu} \\
&\quad - G^{\alpha\beta} \left((P-2Q)G(P) \right)^{\gamma} \left((2K-P-Q)G(P-Q) \right)^{\mu} \\
&\quad + \left((K+P-2Q)G(K-P) \right)^{\beta} \left((P-2Q)G(P) \right)^{\gamma} G^{\alpha\mu}(K-P) \left. \right\} \\
&\cdot \left\{ \left((K+Q)G(K-Q) \right)^{\alpha} (K+P)^{\beta} G^{\gamma\nu}(K) \right. \\
&\quad + (K+P)^{\beta} \left((K-2Q)G(K) \right)^{\gamma} G^{\alpha\nu}(K-Q) \\
&\quad - \left(G(K-Q)G(K) \right)^{\alpha\gamma} (K+P)^{\beta} (2K-Q)^{\nu} \\
&\quad - \left((K+Q)G(K-Q) \right)^{\alpha} (2K-P)^{\gamma} G^{\beta\nu}(K) \\
&\quad - \left((K-2Q)G(K) \right)^{\beta} (2K-P)^{\gamma} G^{\alpha\nu}(K-Q) \\
&\quad + \left(G(K-Q)G(K) \right)^{\alpha\beta} (2K-P)^{\gamma} (2K-Q)^{\nu} \\
&\quad + \left((K+Q)G(K-Q) \right)^{\alpha} \mathbf{g}^{\beta\gamma} \left((K-2P)G(K) \right)^{\nu} \\
&\quad + \left[(K-2P)G(K)(K-2Q) \right] \mathbf{g}^{\beta\gamma} G^{\alpha\nu}(K-Q) \\
&\quad \left. - \left((K-2P)G(K)G(K-Q) \right)^{\alpha} \mathbf{g}^{\beta\gamma} (2K-Q)^{\nu} \right\} \hspace{1em} (\text{D.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \text{---} \textcircled{\hspace{0.5cm}} \text{---} &= g^4 N^2 \sum_{K,P} \frac{1}{K^2 (K-P)^2 (K-Q)^2} \\
&\quad \left\{ \left[(K-Q)G(P-Q)(P+Q) \right] \left((K-P)G(P) \right)^\mu K^\nu \right. \\
&\quad + \left[(K-P)G(P-Q)(P+Q) \right] \left(KG(P) \right)^\mu (K-Q)^\nu \\
&\quad \left. - \left[(K-P)G(P-Q)G(P)K \right] (K-Q)^\mu (2P-Q)^\nu \right\} \quad (\text{D.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 \text{---} \textcircled{\hspace{0.5cm}} \text{---} &= \frac{1}{2} g^4 N^2 \sum_{K,P} \frac{1}{K^2 (K-Q)^2 P^2 (P-Q)^2} \left\{ - \left[(K-Q)G(K-P)P \right] K^\mu (P-Q)^\nu \right\} \\
&\quad (\text{D.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \text{---} \textcircled{\hspace{0.5cm}} \text{---} &= 2 g^4 N^2 \sum_{K,P} \frac{1}{K^4 (K-P)^2 (K-Q)^2} \left\{ - \left[(K-P)G(P)K \right] (K-Q)^\mu K^\nu \right\} \quad (\text{D.23})
\end{aligned}$$

Anhang E Statischer und langwelliger Limes

Hier wird anhand des Integrals $I_1(Q)$ (siehe (3.29)) gezeigt, daß für *soft* Q der langwellige Limes ($q \rightarrow 0$) nicht vertauschbar ist mit dem statischen Limes ($Q_0 \rightarrow \omega \rightarrow 0$). $I_1(Q)$ sei dimensional regularisiert, weswegen alle Terme ohne Bose-Funktion verschwinden. Terme mit Bose-Funktion sind UV-endlich und brauchen nicht regularisiert werden (dimensionale Regularisierung führt auf Terme $\sim \varepsilon$, welche für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwinden).

$$\begin{aligned}
 I_1(Q) &= \sum_P \frac{p^2 \left(1 - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2}{p^2 q^2}\right)}{P^2 (P - Q)^2} \\
 &= \frac{-Q^2}{4\pi^2 q^2} \int_0^\infty dp \, p \, n(p) \left\{ 1 - \frac{Q_0}{q} \ln \left(\frac{Q_0 + q}{Q_0 - q} \right) - \frac{Q_0}{2q} \ln \left(\frac{(Q_0 - q)^2 - 4p^2}{(Q_0 + q)^2 - 4p^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p}{2q} \left(1 + \frac{Q^2}{4p^2} \right) \ln \left(\frac{Q_0^2 - (2p + q)^2}{Q_0^2 - (2p - q)^2} \right) \right\} . \quad (\text{E.1})
 \end{aligned}$$

Analytisches Fortsetzen der Matsubara Frequenzen Q_0 nach $\omega + i\eta$ bringt drei Schnitte auf der reellen Achse zum Vorschein. Wegen Beibehaltung der $+/-$ Symmetrie von Q_0 reicht ein Schnitt von $\omega = -q$ bis nach $\omega = q$ (wenn q reell ist, siehe Abbildung E.1). Die anderen beiden Schnitte reichen bis $\omega \pm \infty$. Dessen innere Endpunkte sind jedoch bereits weit außerhalb des *soft*-Bereichs bei $\omega \sim T$. Für *soft* oder *supersoft* ω , q vereinfacht sich (E.1) daher zu

$$I_1(\omega + i\eta, \vec{q}) = \frac{T^2}{24} \left[2 - \frac{\omega + i\eta}{q} \ln \left(\frac{\omega + q + i\eta}{\omega - q + i\eta} \right) \right] \left(1 - \frac{(\omega + i\eta)^2}{q^2} \right) . \quad (\text{E.2})$$

Hier existiert nur noch ein Schnitt, welcher von $-q$ nach q reicht. Beim Erreichen der Plasmon-Frequenz, d.h. $\omega \rightarrow m$ mit $q \rightarrow 0$ ($\eta = 0$), erhält (E.2) den bekannten Wert $T^2/36$ [11]. Für $\omega < m$ ist dagegen q^2 negativ, weswegen der Schnitt nun auf der imaginären Achse liegt (Abbildung E.1). Jetzt ist der Limes $\omega \rightarrow 0$ (wieder $\eta = 0$) möglich, während $|q|$ endlich, aber *supersoft* bleibt. Im statischen Limes bekommt (E.2) daher den Wert $T^2/12$. Dieser ist identisch mit dem Wert von I_1 für $Q_0 = 0$ ($|q| \ll T$) ohne, daß analytisch fortgesetzt wird.

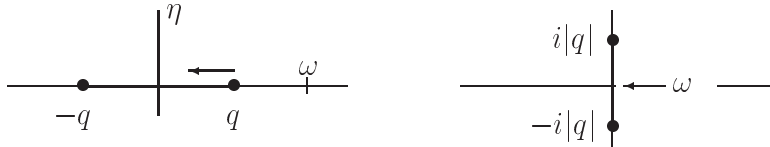


Abbildung E.1: Die komplexe $Q_0 = \omega + i\eta$ Ebene zum einen im langwelligen Limes (links) und zum anderen im statischen Limes (rechts).

Anhang F MAPLE–Programme

Zur 2-loop Ordnung der Gluon Selbstenergie tragen 13 Diagramme bei. Nach Anwendung der Graphenregeln und Ausführung der Farbsummutationen entstehen eine Vielzahl von Termen, welche im Anhang D angegeben sind. Für ein weiteres Auswerten dieser Terme ziehen wir MAPLE–Programme zur Hilfe, insbesondere um die verbliebenen Lorentz-Kontraktionen auszuführen.

Zunächst werden die formellen Ausdrücke für die 2-loop Diagramme (Anhang D, (D.15) bis (D.23)) in „MAPLE–Sprache“ übersetzt. Als Beispiel geben wir das erste (D.17) und das letzte (D.23) Diagramm der zweiten Zeile in Abbildung 3.1 an:

```
### dia1 ### (D.17)
con := 3/2*( G(k,1,2)*G(kp,2,1)*G(pq,m,n) - G(k,m,1)*G(kp,1,2)*G(pq,2,n) ) :

### dia7 ### (D.23)
con := -2*0.k*0.k*0.kp*0.kq*(k1-p1*G(k,1,2)*k2*(km-qm)*kn :
```

Wie Anhang D zeigt, sind die formellen Ausdrücke für die anderen 2-loop Diagramme weniger einfach. Besonders (D.20) benötigt in den unten aufgeführten Programmen einiges an Rechenkapazität.

Das folgende Programm ‘haupt’ liest z.B. ‘dia1’. Im Unterprogramm ‘symm’ werden Symmetrie-Eigenschaften berücksichtigt. Die Lorentz-Kontraktionen werden in den Unterprogrammen ‘contrab’ bzw. ‘contrag’ ausgeführt. Das Ergebnis wird in ‘mol’ abgespeichert.

```
### haupt ### braucht ‘dia1-9’ und ‘symm’, ‘contrab’, ‘contrag’
G := proc(P,a,b) ; if P = kp then P.a := k.a - p.a ; P.b := k.b - p.b ; fi ;
                    if P = kq then P.a := k.a - q.a ; P.b := k.b - q.b ; fi ;
                    if P = pq then P.a := p.a - q.a ; P.b := p.b - q.b ; fi ;
### nackter Gluon-Propagator:
0.P*(g.a.b - alf*0.P*P.a*P.b) ;
### voller minus nackter Gluon-Propagator:
# (T.P - 0.P)*(g.a.b - 0.P*P.a*P.b) + (L.P - 0.P)*B.a.b ;
end :

read dia1 ;          ### Ziffer entsprechend austauschen
read symm ;
dim := 4 :
#dim := 3 : read contrab ;   ### nur im Falle des VOLLEN Gluon-Propagators
read contrag ;
dgg := coeff(con,gmn,1) : con := con - gmn*dgg :
if dgg=0 then nugg := 0 else nugg := nops(dgg) fi ;
dpp := coeff(con,pm,2) : con := con - pm^2*dpp :
dpp := subs(p=x,k=p,x=k,pq=xq,kq=pq,xq=kq, dpp) :
dkk := coeff(con,km,2) : con := con - km^2*dkk :
dkk := expand(dkk+dpp) :
if dkk=0 then nukk := 0 else nukk := nops(dkk) fi ;
dkp := coeff(coeff(con,km,1),pm,1) : con := con - km*pm*dkp :
if dkp=0 then nukp := 0 else nukp := nops(dkp) fi ;
rest := expand(con) ;          ### Probe
save dgg, nugg, dkk, nukk, dkp, nukp, ‘mol’ ;   ### Ziffer entspr. austauschen
```

Obiges Programm kann sowohl für nackte Propagatoren G_0 (Abschnitt 3.3) als auch für die Differenz $G_- = G - G_0$ (Abschnitt 3.5) verwendet werden. In letzterem Fall gilt $K_0 = P_0 = 0$ und wegen des statischen Limes $Q_0 = 0$. Die Matrix \mathbf{B} kann durch $U \circ U$ ersetzt werden. Die Matrix \mathbf{A} enthält keine Null-Komponenten (Anhang C). In der in ‘haupt‘ verwendeten Darstellung der Matrix \mathbf{A} enthält ‘g‘ also ebenfalls keine Null-Komponente. Produkte zwischen ‘g‘ und ‘B‘ verschwinden daher.

Das Unterprogramm ‘symm‘ berücksichtigt die Symmetrien der Lorentz-Matrizen und Vereinfachungen, welche sich durch Spurbildung der Selbstenergie $\Pi(Q)$ mit $\mathbf{A}(Q)$ ergeben:

```
### symm ### fuer ‘haupt‘
con := subs(Bm1=0,B1m=0,Bn1=0,B1n=0,Bm2=0,B2m=0,Bn2=0,B2n=0,
            Bm3=0,B3m=0,Bn3=0,B3n=0,Bm4=0,B4m=0,Bn4=0,B4n=0,
            Bm5=0,B5m=0,Bn5=0,B5n=0,Bm6=0,B6m=0,Bn6=0,B6n=0, con) :
con := subs(B21=B12,B31=B13,B41=B14,B51=B15,B61=B16,B32=B23,B42=B24,B52=B25,
            B62=B26,B43=B34,B53=B35,B63=B36,B54=B45,B64=B46,B65=B56, con) :
con := subs(qm=0,qn=0,km=km,pn=pm, con) :
con := subs(g1n=g1m,g2n=g2m,g3n=g3m,g4n=g4m,g5n=g5m,g6n=g6m,
            gn1=gm1,gn2=gm2,gn3=gm3,gn4=gm4,gn5=gm5,gn6=gm6, con) :
con := subs(g1m=gm1,g2m=gm2,g3m=gm3,g4m=gm4,g5m=gm5,g6m=gm6,gnm=gm,
            g21=g12,g31=g13,g41=g14,g51=g15,g61=g16,g32=g23,g42=g24,g52=g25,
            g62=g26,g43=g34,g53=g35,g63=g36,g54=g45,g64=g46,g65=g56, con) :
con := expand(con) : nu_symm := nops(con) ;
```

Die Diagramme können maximal fünf Gluon-Propagatoren enthalten. Wird solch ein Diagramm in ‘haupt‘ eingesetzt, dann müssen in jedem Term sechs Lorentz-Kontraktionen ausgeführt werden. Die in ‘haupt‘ eingelesenen Unterprogramme werden daher sehr lang. Wir geben sie hier nur soweit an, daß die Funktionsweise deutlich wird.

Im Fall des nackten Gluon-Propagators G_0 wird neben ‘symm‘ nur das Unterprogramm ‘contrag‘ eingelesen:

```
### contrag ### fuer ‘haupt‘
### gij mit gjl , i,j,l=1..6
cf := coeff(diff(con,g12),g13,1) : con := con - g12*g13*cf + g23*cf : # u.s.w.
### gij mit gmj , i,j=1..6
cf := coeff(diff(con,g12),gm1,1) : con := con - g12*gm1*cf + gm2*cf : # u.s.w.
### gmj mit gnj , j=1..6 , m=n wegen Symm.
cf := coeff(con,gm1,2) : con := con - gm1^2*cf + gmn*cf : # u.s.w.
### gij mit gij , i,j=1..6
cf := coeff(con,g12,2) : con := con - g12^2*cf + dim*cf : # u.s.w.
### gjj , j=1..6
cf := coeff(con,g11,1) : con := con - g11*cf + dim*cf : # u.s.w.
### gij mit kj,pj,qj , i,j=1..6
cf := coeff(diff(con,g12),k1,1) : con := con - g12*k1*cf + k2*cf : # u.s.w.
### gmj mit kj,pj,qj , j=1..6
cf := coeff(diff(con,gm1),k1,1) : con := con - gm1*k1*cf + km*cf : # u.s.w.
### kj mit pj , kj mit qj , pj mit qj , j=1..6
cf := coeff(diff(con,k1),p1,1) : con := con - k1*p1*cf + kp*cf : # u.s.w.
### kj mit kj , pj mit pj , qj mit qj , j=1..6
cf := coeff(con,k1,2) : con := con - k1^2*cf + k^2*cf : # u.s.w.
con := expand(con) : nu_contrag := nops(con) ;
```


Im Fall des Propagators $G_- = G - G_0$ wird zusätzlich das Unterprogramm ‘contrab’ benötigt, welches Produkte mit den Matrizen $\mathbf{B}|_{P_0=0} = U \circ U$ ausführt:

```
### contrab ### fuer ‘haupt‘
### Bij mit Bj1 , i,j,l=1..6
cf := coeff(diff(con,B12),Bi3,1) : con := con - B12*B13*cf + B23*cf : # u.s.w.
### Bij mit Bij , i,j=1..6
cf := coeff(con,B12,2) : con := con - B12^2*cf + cf : # u.s.w.
### Bjj , j=1..6
cf := coeff(con,B11,1) : con := con - B11 - B11*cf + cf : # u.s.w.
### Bij mit gj1 , i,j,l=1..6
cf := coeff(diff(con,B12),g12,1) : con := con - B12*g12*cf : # u.s.w.
### Bij mit gmj , i,j=1..6
cf := coeff(diff(con,B12),gm1,1) : con := con - B12*gm1*cf : # u.s.w.
### Bij mit kj,pj,qj , i,j=1..6
cf := coeff(diff(con,B12),k1,1) : con := con - B12*k1*cf : # u.s.w.
con := expand(con) : nu_contrab := nops(con) ;
```

Der nackte Gluon-Propagator enthält den Eichfixierungsparameter α . Das folgende Programm ‘sum’ summiert die Diagramme und sortiert die Terme nach $\sim g^{\mu\nu}$, $\sim K^\mu K^\nu$ und $K^\mu P^\nu$.

```
### sum ### braucht ‘mo1‘ bis ‘mo9‘ und ‘alfpo‘
read mo1 : dgg1 := dgg : dkk1 := dkk : dkp1 := dkp : # analog fuer mo2 bis mo9
con := expand(dgg1+dgg2+dgg3+dgg4+dgg5+dgg6
+dgg7+dgg8+dgg9) :
read alfpo ; alf5gg := alf5 : alf4gg := alf4 : alf3gg := alf3 :
alf2gg := alf2 : alf1gg := alf1 : alf0gg := alf0 :
con := expand(dkk1+dkk2+dkk3+dkk4+dkk5+dkk6
+dkk7+dkk8+dkk9) :
read alfpo ; alf5kk := alf5 : alf4kk := alf4 : alf3kk := alf3 :
alf2kk := alf2 : alf1kk := alf1 : alf0kk := alf0 :
con := expand(dkp1+dkp2+dkp3+dkp4+dkp5+dkp6
+dkp7+dkp8+dkp9) :
read alfpo ; alf5kp := alf5 : alf4kp := alf4 : alf3kp := alf3 :
alf2kp := alf2 : alf1kp := alf1 : alf0kp := alf0 :
save alf5gg, alf5kk, alf5kp, ‘moalf5‘ ;
save alf4gg, alf4kk, alf4kp, ‘moalf4‘ ;
save alf3gg, alf3kk, alf3kp, ‘moalf3‘ ;
save alf2gg, alf2kk, alf2kp, ‘moalf2‘ ;
save alf1gg, alf1kk, alf1kp, ‘moalf1‘ ;
save alf0gg, alf0kk, alf0kp, ‘moalf0‘ ;
```

Das Unterprogramm ‘alfpo’, welches von ‘sum’ gelesen wird, sortiert nach $(\alpha - 1)$ -Potenzen. Die Ergebnisse werden für jede $(\alpha - 1)$ -Potenz getrennt abgespeichert.

```
### alfpo ### fuer ‘sum‘
alf5 := coeff(con,alf,5) : con := expand(con - alf^5*alf5) : nu5 := nops(alf5) ;
alf4 := coeff(con,alf,4) : con := expand(con - alf^4*alf4) : nu4 := nops(alf4) ;
alf3 := coeff(con,alf,3) : con := expand(con - alf^3*alf3) : nu3 := nops(alf3) ;
alf2 := coeff(con,alf,2) : con := expand(con - alf^2*alf2) : nu2 := nops(alf2) ;
alf1 := coeff(con,alf,1) : con := expand(con - alf^1*alf1) : nu1 := nops(alf1) ;
alf0 := con : nu0 := nops(alf0) ;
```


Literaturverzeichnis

- [1] J.I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*
(Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [2] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [3] P. Braun–Munzinger, I. Heppe und J. Stachel, Phys. Lett. B 465 (1999) 15.
- [4] U. Heinz, *Dem Urknall nahe*, Phys. Blätter 56/4 (2000) 12.
- [5] J.I. Kapusta, Nucl. Phys. B 148 (1979) 461.
- [6] P. Ramond, *Field Theory – A Modern Primer*
(Addison–Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1989);
L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996);
M.E. Peskin und D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theorie*
(Addison–Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1996).
- [7] E. Braaten und R.D. Pisarski, Nucl. Phys. B 337 (1990) 569;
E. Braaten und R.D. Pisarski, Nucl. Phys. B 339 (1990) 310;
J. Frenkel und J.C. Taylor, Nucl. Phys. B 334 (1990) 199.
- [8] J.C. Taylor und S.M. Wong, Nucl. Phys. B 346 (1990) 115;
J. Frenkel und J.C. Taylor, Nucl. Phys. B 374 (1992) 156.
- [9] E. Braaten und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D 45 (1992) R1827;
R. Efraty und V.P. Nair, Phys. Rev. D 47 (1993) 5601.
- [10] E. Braaten und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D 42 (1990) 2156;
E. Braaten und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D 46 (1992) 1829.
- [11] H. Schulz, Nucl. Phys. B 413 (1994) 353.
- [12] F. Flechsig, A. Rebhan und H. Schulz, Phys. Rev. D 52 (1995) 2994.
- [13] P. Arnold und O. Espinosa, Phys. Rev. D 47 (1993) 3546.

- [14] P. Arnold und C. Zhai, Phys. Rev. D 50 (1994) 7603;
P. Arnold und C. Zhai, Phys. Rev. D 51 (1995) 1906.
- [15] C. Zhai und B. Kastening, Phys. Rev. D 52 (1995) 7232.
- [16] E. Braaten und A. Nieto, Phys. Rev. D 51 (1995) 6990;
E. Braaten und A. Nieto, Phys. Rev. D 53 (1996) 3421;
A. Nieto, Int. J. Mod. Phys. A 12 (1997) 1431.
- [17] G. Alexanian und V.P. Nair, Phys. Lett. B 352 (1995) 435;
R. Jackiw und S.-Y. Pi, Phys. Lett. B 368 (1996) 131;
W. Buchmüller und O. Philipsen, Phys. Lett B 397 (1997) 112.
- [18] A.D. Linde, Rep. Prog. Phys. 42 (1979) 389;
A.D. Linde, Phys. Lett. B 96 (1980) 289.
- [19] D.J. Gross, R.D. Pisarski und L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 43.
- [20] T. Appelquist und R.D. Pisarski, Phys. Rev. D 23 (1981) 2305.
- [21] D. Karabali und V.P. Nair, Nucl. Phys. B 464 (1996) 135;
D. Karabali und V.P. Nair, Phys. Lett. B 379 (1996) 141;
D. Karabali und V.P. Nair, Int. J. Mod. Phys. A 12 (1997) 1161.
- [22] D. Karabali, C. Kim und V.P. Nair, Nucl. Phys. B 524 (1998) 661.
- [23] D. Karabali, C. Kim und V.P. Nair, Phys. Lett. B 434 (1998) 103.
- [24] J. Reinbach und H. Schulz, Phys. Lett. B 467 (1999) 247 (und B 473 (2000) 343).
- [25] N.P. Landsman und Ch.G. Weert, Phys. Reports 145 (1987) 141.
- [26] H. Schulz, *Lecture Notes: Quantenfelder am Wärmebad*
Universität Hannover, SS 1997.
- [27] Cheng und Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*
(Clarendon Press, Oxford, 1988).
- [28] J. Reinbach, *Diplomarbeit*
(Institut für Theoretische Physik, Universität Hannover, September 1997).
- [29] Y. Schröder und H. Schulz, Phys. Rev. D 54 (1996) 7677.
- [30] J. Reinbach und H. Schulz, Phys. Lett. B 404 (1997) 291.
- [31] I.T. Drummond, R.R. Horgan, P.V. Landshoff und A.K. Rebhan, Phys. Lett. B 398 (1997) 326.
- [32] U. Kraemmer, A.K. Rebhan und H. Schulz, Ann. Phys. 238 (1995) 268;
U. Kraemmer, A.K. Rebhan und H. Schulz, preprint DESY 95-091.

- [33] F. Flechsig und H. Schulz, Phys. Lett. B 349 (1995) 504.
- [34] P. Becher, M. Böhm und H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung* (Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1983).
- [35] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 61 (1973) 455;
G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 849.
- [36] H. Schulz, Phys. Lett. B 291 (1992) 448.
- [37] R. Kobes, G. Kunstatter und A. Rebhan, Nucl. Phys. B 355 (1991) 1.
- [38] H.A. Weldon, Phys. Rev. D 26 (1982) 1394.
- [39] A. Rebhan, Nucl. Phys. B 430 (1994) 319.
- [40] F. Karsch, T. Neuhaus, A. Patkos und J. Rank, Nucl. Phys. B 474 (1996) 217;
F. Karsch, M. Oevers und P. Petreczky, Phys. Lett. B 442 (1998) 291;
U.M. Heller, F. Karsch und J. Rank, Phys. Rev. D 57 (1998) 1438.
- [41] D. Karabali, C. Kim und V.P. Nair, hep-th/0007188.
- [42] H. Schulz, *Lecture Notes: The 3D Yang–Mills System*,
LAPTH-808/00, ITP-UH 16/00, hep-ph/0008239
- [43] D. Karabali, hep-th/9809087, V.P. Nair, hep-th/9809086,
in: U. Heinz (Ed.), Proc. 5th Int. Workshop on Thermal Field Theories and Their Applications, Regensburg, August 1998, hep-ph/9811469.
- [44] V.P. Nair, hep-th/9911061.
- [45] A.M. Polyakov und P.B. Wiegmann, Phys. Lett. B 141 (1984) 223;
D. Karabali und H.J. Schnitzer, Nucl. Phys. B 329 (1990) 649.
- [46] E. Witten, Comm. Math. Phys. 92 (1984) 455;
S.P. Novikov, Usp. Mat. Nauk 37 (1982) 3.
- [47] K. Gawedzki und A. Kupiainen, Nucl. Phys. B 320 (1989) 625;
M. Bos und V.P. Nair, Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990) 959.
- [48] R.R. Parwani und H. Singh, Phys. Rev. D 51 (1995) 4518.
- [49] A.K. Rebhan, Phys. Rev. D 48 (1993) R3967.
- [50] C. Itzykson und J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*
(McGraw–Hill, New York, 1980).
- [51] T. Toimela, Phys. Lett. B 124 (1983) 407.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Prof. Dr. Hermann Schulz, für die Vergabe des interessanten Themas und seine in jeder Hinsicht hervorragende Betreuung. Die zahlreichen Anregungen und unermüdliche Diskussionsbereitschaft waren eine große Bereicherung.

Dem hiesigen Graduiertenkolleg „Quantenfeldtheoretische Methoden in der Teilchenphysik, Gravitation und statistischen Physik“, finanziert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft, danke ich für das Stipendium und die freundliche Aufnahme. Das Arbeitsklima am Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover war überaus erfreulich.

Schließlich danke ich meinen Eltern, welche mir Studium und Promotion ermöglicht haben.

Lebenslauf

Geboren am 15.07.1968 in Hannover. Hier aufgewachsen und zur Schule gegangen. Abitur 1988. Anschließend 20 Monate Zivildienst beim Arbeiter-Samariter-Bund Hannover-Stadt in der Schwerbehindertenbetreuung.

Zum Wintersemester 1992 Aufnahme des Physikstudiums an der Universität Hannover. Diplom im September 1997. Drei Semester Mitarbeit im Übungsbetrieb des Instituts für Theoretische Physik. Fortführung dieser Tätigkeit im Wintersemester 1997/98. Seit Sommersemester 1998 Stipendiat des Graduiertenkollegs „Quantenfeldtheoretische Methoden in der Teilchenphysik, Gravitation und statistischen Physik“ der Universität Hannover. Zeitweise Mitarbeit im Übungsbetrieb.

Publikationen

J. Reinbach, H. Schulz, Phys. Lett. B 404 (1997) 291;
J. Reinbach, H. Schulz, Phys. Lett. B 467 (1999) 247.